Corrigé du Brevet de technicien supérieur – Polynésie
14 mai 2024 - Comptabilité et gestion

Exercice 1 — 10 points

Partie A

Une entreprise, spécialisée dans la fabrication de desserts fruités, souhaite créer deux nouvelles compotes inédites : l'une à la saveur banane/cannelle, et l'autre à la saveur poire/fève de tonka.

Pour ces deux préparations, elle achète les fruits (bananes et poires) auprès de deux grossistes : le premier s'appelle « au bon fruit ».

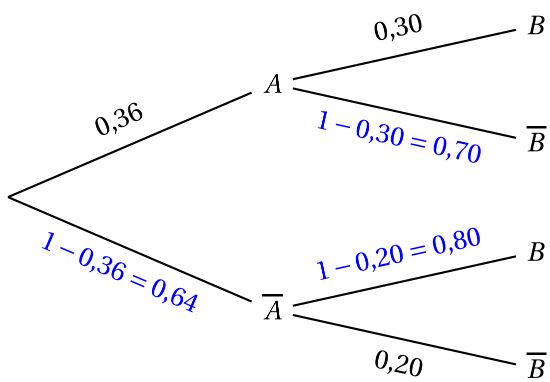
À l'issue des achats, on observe les répartitions suivantes :

- 36 % des fruits proviennent de chez « au bon fruit ».
- Parmi les fruits achetés chez le grossiste « au bon fruit », 30 % sont des bananes.
- Un cinquième des fruits achetés chez le second grossiste sont des poires.

On choisit un fruit au hasard et on suppose que tous les fruits ont la même probabilité d'être choisis.

On considère les évènements suivants : A : « Le fruit provient de chez au bon fruit », et B : « Le fruit est une banane ».

1. Parmi les fruits achetés chez le grossiste « au bon fruit », 30 % sont des bananes, donc $P_A(B) = 0{,}30$.
2. On complète l'arbre de probabilité résumant la situation.



3. La probabilité que le fruit provienne de chez « au bon fruit » et soit une banane est : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}36 \times 0{,}3 = 0{,}108$.
4. D'après la formule des probabilités totales : $P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0{,}108 + 0{,}64 \times 0{,}80 = 0{,}62$.

5. Sachant que le fruit est une banane, la probabilité qu'elle provienne de chez « au bon fruit » est : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,108}{0,62} \approx 0,1742$.

Partie B

Dans le cadre d'un contrôle qualité, 1 000 pots sont prélevés au hasard dans la production de compote banane/cannelle et poire/fève de tonka. Ce tirage est assimilé à un tirage avec remise car le nombre de pots de compote est très grand. On suppose que la probabilité que la saveur du pot soit poire/fève de tonka est de 0,38. Soit X la variable aléatoire qui, dans le lot de 1 000 pots, associe le nombre de pots saveur poire/fève de tonka.

1. L'expérience consiste à tester la saveur d'un pot prélevé au hasard; il y a deux issues possibles : la saveur est poire/fève de tonka, avec une probabilité $p = 0,38$, ou la saveur est autre.

   Ce tirage des 1 000 pots est assimilé à un tirage avec remise car le nombre de pots de compote est très grand donc on est dans le cas d'une répétition de 1 000 épreuves identiques et indépendantes.

   Donc la variable aléatoire X qui, dans le lot de 1 000 pots, associe le nombre de pots saveur poire/fève de tonka, suit la loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0,38$.
2. La probabilité d'obtenir dans le lot exactement 350 pots saveur poire/fève de tonka est : $P(X = 350) \approx 0,0038$.
3. **a.** À l'aide de la calculatrice, on trouve : $P(X \leqslant 400) \approx 0,9088$.

   b. On peut donc dire qu'il y a environ 91 % de chances que, dans un lot de 1 000 pots prélevés au hasard, il y en ait au plus 400 de saveur poire/fève de tonka.

Partie C

L'entreprise s'intéresse au remplissage de ses pots de compote. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque pot prélevé dans la production, associe la quantité de compote qu'il contient, exprimée en gramme. On admet que Y suit la loi normale d'espérance $\mu = 90$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

1. L'espérance est égale à 90, cela signifie que la quantité moyenne de compote dans un pot est de 90 g.
2. La probabilité que le pot contienne 87 g de compote ou moins est :
   $P(0 \leqslant Y \leqslant 87) \approx 0,0668$.
3. On estime qu'un pot de compote est conforme lorsque la quantité qu'il contient est comprise entre 85 g et 95 g.

   a. La probabilité que le pot soit non conforme est : $1 - P(85 \leqslant Y \leqslant 95) \approx 0,0124$.

   b. L'entreprise a produit 550 000 pots. On estime que 1,2 % des pots ne sont pas conformes.

   Le nombre de pots non conformes est donc estimé à : $550000 \times \dfrac{1,2}{100} = 6600$.

c. L'entreprise décide de faire don des pots qui ne sont pas conformes à une organisation caritative. Un pot est normalement vendu 0,30 €.

Le montant du don est estimé à $6\,600 \times 0,30$ soit 1 980 €.

Exercice 2 — 10 points

Partie A

Une entreprise d'évènementiel vient de créer une application destinée aux particuliers. Le 1er septembre 2022, elle envoie une invitation à télécharger l'application à tout son réseau. Chaque mois, elle note le nombre de personnes ayant téléchargé l'application. Les cinq premiers mois sont répertoriés dans le tableau ci-dessous. Le rang 0 correspond au mois de septembre 2022.

Mois	Sept. 2022	Oct. 2022	Nov. 2022	Déc. 2022	Janv. 2023
Rang du mois (x_i)	0	1	2	3	4
Nombre de téléchargements (y_i)	122	155	180	207	250

1. À l'aide de la calculatrice, on trouve un ajustement affine de y en fonction de x selon la méthode des moindres carrés : $y = 30,8x + 121,2$.
2. Dans cette question, on suppose que la droite d'ajustement est donnée par l'équation $y = 31x + 121$.

a. Mars 2023 correspond au rang 6.

$31 \times 6 + 121 = 307$ donc le nombre de téléchargements en mars 2023 peut être estimé à 307.

b. Le nombre de téléchargements mensuels sera au moins de 400 pour un rang x tel que $31x + 121 \geqslant 400$. On résout cette inéquation.

$$31x + 121 \geqslant 400 \iff 31x \geqslant 400 - 121 \iff 31x \geqslant 279 \iff x \geqslant \frac{279}{31} \iff x \geqslant 9$$

Le rang 9 correspond à juin 2023, c'est donc à partir de juin 2023 que le nombre de téléchargements mensuels sera de 400.

Partie B

En réalité, le nombre de téléchargements effectués jusqu'à la fin du mois de rang 8 est donné dans la feuille de calcul ci-dessous. La ligne 3 est au format pourcentage (arrondi au dixième).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Rang du mois (x_i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	Nombre de téléchargements (y_i)	122	155	180	207	250	313	398	521	663
3	Taux d'évolution mensuel			16,1 %	15,0 %	20,8 %	25,2 %	27,2 %	30,9 %	27,3 %

1. **a.** La formule qui, saisie dans la cellule C3, permet d'obtenir par recopie vers la droite les différents taux d'évolution mensuels est : `= (C2 - B2) / B2`
   b. La valeur de la cellule C3, arrondie à 0,1 % près, est alors 27,0 %.
2. Le nombre de téléchargements le mois de rang 4 est 250, et le nombre de téléchargements le mois de rang 8 est 663.

   $\dfrac{663-250}{250}=1{,}652$ ce qui fait une augmentation de 165,2 % soit environ 165 %.
3. Rappels
   - Augmenter de $t\,\%$, c'est multiplier par $k=1+\dfrac{t}{100}$.
   - $k=1+\dfrac{t}{100} \iff k-1=\dfrac{t}{100} \iff 100(k-1)=t$
   - Si on a un coefficient multiplicateur de $k>1$, cela correspond donc à une augmentation de $t\,\%$ avec $t=100(k-1)$

   Le coefficient multiplicateur pour passer du rang 4 au rang 8 est $\dfrac{663}{250}$ soit 2,652.

   Il y a 4 rangs d'écart donc le coefficient multiplicateur moyen annuel est $\sqrt[4]{2{,}652}=2{,}652^{\frac{1}{4}}\approx 1{,}276$.

   $100(1{,}276-1)=27{,}6$ donc le coefficient moyen de 1,276 correspond à une augmentation moyenne de 27,6 %.

Partie C

Pour estimer le nombre de téléchargements à partir du mois de mai 2023, on fait l'hypothèse d'un taux d'évolution mensuel constant de 30 %. On note u_n le nombre de téléchargements mensuels estimé au cours du n-ième mois après le mois de mai 2023. Le nombre de téléchargements au mois de mai 2023 est $u_0=663$.

1. $u_0+u_0\times\dfrac{30}{100}=663+663\times\dfrac{30}{100}=861{,}9$ donc $u_1=862$.
2. Ajouter 30 %, c'est multiplier par $1+\dfrac{30}{100}$, soit 1,3.

   La suite (u_n) est donc une suite géométrique de premier terme $u_0=663$ et de raison $q=1{,}3$.
3. On en déduit que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n=u_0\times q^n=663\times 1{,}3^n$.
4. Mai 2023 correspond au rang 8 et à $n=0$.
   Janvier 2024 correspond au rang 16, donc à $n=8$.

   $663\times 1{,}3^8\approx 5\,408{,}4$ donc $u_8=5\,408$

   Donc selon ce modèle, le nombre de téléchargements que l'entreprise peut espérer en mai 2024 est de 5 408.
5. **a.** L'entreprise prévoit de participer à un challenge de l'innovation numérique qui récompense les applications dès que le nombre de téléchargements dépasse les 100 000 téléchargements mensuels.

   On complète l'algorithme pour qu'après exécution, la variable N contienne le nombre de mois après mai 2023 à partir duquel l'entreprise pourra candidater au challenge, selon ce modèle.

```
N ← 0
U ← 663
Tant que U ⩽ 100 000
    N ← N + 1
    U ← 1,3 * U
Fin Tant que
Afficher N
```

b. Pour déterminer le nombre de mois après mai 2023 à partir duquel l'entreprise pourra candidater au challenge, selon ce modèle, il faut chercher le plus petit entier n tel que $u_n > 100\,000$.

Deux méthodes

- En programmant la fonction $x \longmapsto 663 \times 1,3^x$ sur la calculatrice, et en faisant afficher la table de valeurs avec un pas égal à 1, on trouve pour $u_{19} = 96\,925$ et $u_{20} = 126\,003$. Donc le nombre de mois cherché est 20.
- On peut aussi résoudre l'inéquation : $u_n > 100\,000$.

$$u_n > 100\,000 \iff 663 \times 1,3^n > 100\,000 \iff 1,3^n > \frac{100\,000}{663}$$
$$\iff \ln\left(1,3^n\right) > \ln\left(\frac{100\,000}{663}\right) \iff n \times \ln(1,3) > \ln\left(\frac{100\,000}{663}\right)$$
$$\iff n > \frac{\ln\left(\frac{100\,000}{663}\right)}{\ln(1,3)}$$

$\dfrac{\ln\left(\frac{100\,000}{663}\right)}{\ln(1,3)} \approx 19,12$ donc la valeur cherchée est bien 20.