∽ Corrigé du Brevet de technicien supérieur – Métropole ∽
14 mai 2024 - Comptabilité et gestion

Exercice 1 **10 points**

Une usine spécialisée dans la fabrication d'une pièce mécanique pour automobile utilise, dans sa chaîne de production, trois machines qu'on notera M_1, M_2, et M_3.

Partie A

Une étude statistique a montré que :

- la machine M_1 produit 41 % des pièces dont 2,5 % sont défectueuses,
- la machine M_2 produit 30 % des pièces dont 1,9 % sont défectueuses,
- la machine M_3 produit le reste des pièces dont 1,5 % sont défectueuses

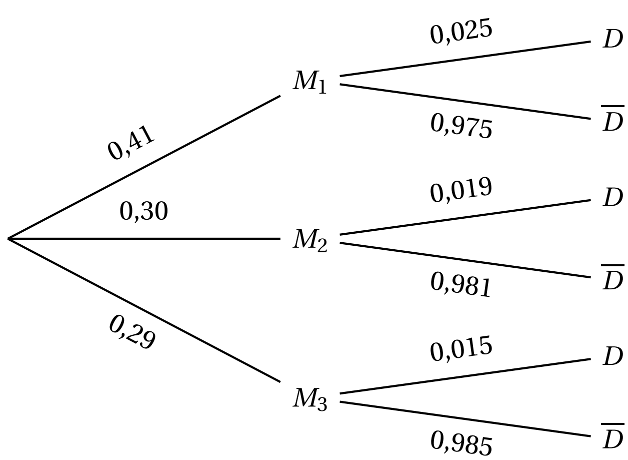
On choisit au hasard une pièce dans cette chaîne de production et on suppose que toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies.

On note les évènements :

- M_1 : « La pièce choisie est produite par la machine M_1 ».
- M_2 : « La pièce choisie est produite par la machine M_2 ».
- M_3 : « La pièce choisie est produite par la machine M_3 ».
- D : « La pièce choisie est défectueuse ».

.On notera $\overline{D}$ l'évènement contraire de l'évènement D.

1. La machine M_1 produit 41 % des pièces dont 2,5 % sont défectueuses, donc $P_{M_1}(D) = 0{,}025$.
2. On complète l'arbre de probabilités.



3. **a.** L'évènement $M_1 \cap D$ correspond à « La pièce choisie est produite par la machine M_1 et est défectueuse. »

b. $P(M_1 \cap D) = P(M_1) \times P_{M_1}(D) = 0{,}41 \times 0{,}025 = 0{,}01025$

4. **a.** D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(M_1 \cap D) + P(M_2 \cap D) + P(M_3 \cap D) \\ &= 0{,}01025 + 0{,}30 \times 0{,}019 + 0{,}29 \times 0{,}015 \\ &= 0{,}01025 + 0{,}0057 + 0{,}00435 \\ &= 0{,}0203 \end{aligned}$$

b. Il y a donc 2,03 % de risque que la pièce choisie soit défectueuse.

5. La pièce choisie au hasard est défectueuse, la probabilité qu'elle soit produite par la machine M_3 est : $P_D(M_1) = \dfrac{P(M_1 \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}01025}{0{,}0203} \approx 0{,}505$.

Partie B

On suppose dans cette partie que $P(D) = 0{,}02$.

On prélève au hasard 600 pièces. On suppose que le stock est assez important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement associe le nombre de pièces défectueuses.

1. Pour une pièce, il n'y a que deux issues : elle est défectueuse (avec une probabilité de $p = 0{,}02$), ou elle ne l'est pas.

On prélève au hasard 600 pièces et on suppose que le stock est assez important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On est dans le cas d'une répétition de 600 tirages qui s'effectuent de manière indépendante et identique.

Donc la variable aléatoire X qui, à chaque prélèvement associe le nombre de pièces défectueuses, suit la loi binomiale de paramètres $n = 600$ et $p = 0{,}02$.

2. **a.** $P(X = 12) = \dbinom{600}{12} \times 0{,}02^{12} \times (1 - 0{,}02)^{600-12} \approx 0{,}116$

b. L'arrondi au millième de la probabilité que dans l'échantillon de 600 pièces, il y en ait exactement 12 de défectueuses est de 0,116.

3. À la calculatrice, on trouve que l'arrondi au millième de la probabilité de l'évènement « cinq pièces ou moins sont défectueuses » est $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}019$.

4. **a.** $P(X \geqslant 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - P(X \leqslant 5) \approx 0{,}981$

b. L'arrondi au millième de la probabilité de l'évènement « six pièces ou plus sont défectueuses » est de 0,981.

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre des pièces qui sont de format cylindrique. On prélève au hasard une pièce dans le stock. On suppose que la variable aléatoire Y qui associe à chaque pièce son diamètre (en centimètre), suit la loi normale de paramètres $\mu = 5$ et $\sigma = 0{,}04$.

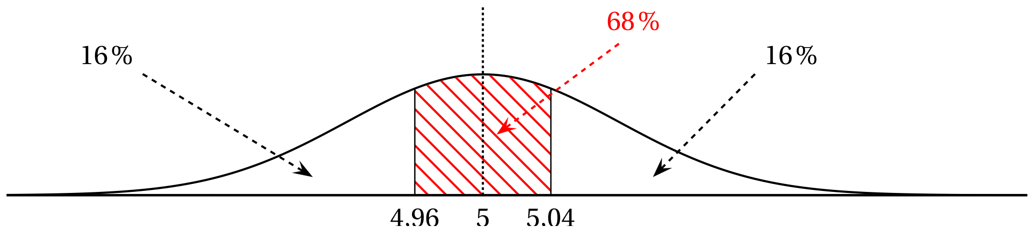
1. **a.** $\mu = 5$ et $\sigma = 0{,}04$ donc $P(4{,}92 \leqslant Y \leqslant 5{,}08) = P(\mu - 2\sigma \leqslant Y \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$ d'après le cours.

b. Il y a donc environ 95 % de chances que le diamètre d'une pièce choisie au hasard soit compris entre 4,92 mm et 5,08 mm.

2. À la calculatrice, on trouve que la probabilité que le diamètre de cette pièce soit au minimum de 4,96 centimètres est : $P(Y \geqslant 4,96) \approx 0,84$.

Remarque - On aurait pu trouver cette réponse sans la calculatrice.

En effet, on sait d'après le cours que $P(\mu - \sigma \leqslant Y \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,68$, donc $P(4,96 \leqslant Y \leqslant 5,04) \approx 0,68$.



Pour des raisons de symétrie, on a : $P(Y \leqslant 4,96) = P(Y \geqslant 5,04) \approx \dfrac{1-0,68}{2} = 0,16$.

Donc $P(Y \geqslant 4,96) = P(4,96 \leqslant Y \leqslant 5,04) + P(Y \geqslant 5,04) \approx 0,68 + 0,16 = 0,84$.

Exercice 2 — 10 points

Partie A

Le tableau suivant donne le bénéfice (en milliers d'euros) réalisé par une entreprise spécialisée dans la vente à distance.

Année	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6
Bénéfice en milliers d'euros : y_i	9 9	11,3	12,5	13,4	14,4	15,4

1. On détermine à la calculatrice un ajustement affine de y en fonction de x selon la méthode des moindres carrés, en arrondissant les coefficients au centième :
$y = 1,08x + 9,05$.

2. Dans cette question, on décide d'ajuster le nuage de points $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ par la droite d'équation : $y = 1,1x + 9$.

Selon ce modèle :

a. L'année 2025 correspond à $x = 9$.

Une estimation, en milliers d'euros, du bénéfice en 2025 est donc :
$1,1 \times 9 + 9 = 18,9$.

b. Pour déterminer l'année à partir de laquelle le bénéfice dépassera 22 000 euros pour la première fois, on cherche x entier tel que $1,1x + 9 > 22$;
ce qui fait : $1,1x > 13$ soit $x > \dfrac{13}{1,1}$.

Or $\dfrac{13}{1,1} \approx 11,8$ donc c'est à partir de $x = 12$ soit l'année 2028 que le bénéfice dépassera 20 000 € pour la première fois.

Partie B

Le tableau suivant est un extrait d'une feuille de calcul qui donne l'évolution annuelle d'une année par rapport à la précédente) du nombre de produits vendus entre 2017 et 2022.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Année	2017	2018	2019	2020	2021	2022
2	Nombre de produits vendus	620	700	810	928	1 095	1 289
3	Évolution annuelle en %		12,9 %	15,7 %	14,6 %	17,7 %	18 %

1. La plage des cellules C3 à G3 est au format pourcentage, arrondie à 0,1 % près.
   - **a.** La formule qui, saisie dans la cellule C3, permet d'obtenir par recopie vers la droite les taux annuels successifs de la ligne 3 est : `(C2- B2)/B2*100`
   - **b.** La valeur de la cellule F3, arrondie à 0,1 % près est : $\dfrac{1\,092 - 928}{928} \times 100 \approx 17,7$ %.
2. - **a.** Le taux d'évolution global entre 2017 et 2022, arrondi à 1 %, est : $\dfrac{1\,289 - 620}{620} \times 100 \approx 108$.
   - **b.** Un taux d'évolution sur 5 années de 108 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \dfrac{108}{100} = 2,08$.

     Le coefficient multiplicateur moyen par an est donc de $\sqrt[5]{2,08} \approx 1,158$.

     Le taux d'évolution annuel moyen entre 2017 et 2022, arrondi à 0,1 % est donc de 15,8.

Partie C

On suppose dans cette partie, qu'à partir de l'année 2022, le nombre de produits vendus augmente chaque année de 16 %. On décide de modéliser ce nombre par une suite (u_n) où u_n désigne le nombre de produits vendus l'année $(2022 + n)$. Ainsi $u_0 = 1\,289$.

1. On arrondit les valeurs à l'unité.

   $u_1 = u_0 + u_0 \times \dfrac{16}{100} = 1\,289 + 1\,289 \times \dfrac{16}{100} \approx 1\,495$

   $u_2 = u_1 + u_1 \times \dfrac{16}{100} = 1\,495 + 1\,495 \times \dfrac{16}{100} \approx 1\,734$
2. Ajouter 16 %, c'est multiplier par $1 + \dfrac{16}{100}$ soit 1,16.

   Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,16$ et de premier terme $u_0 = 1\,289$.

3. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}16$ et de premier terme $u_0 = 1\,289$ donc, pour tout n, on a :

$u_n = u_0 \times q^n = 1\,289 \times 1{,}16^n$.

L'entreprise prévoit d'investir dans une nouvelle plateforme numérique de vente à distance dès que le nombre de produits vendus dépassera 3 000.

4. **a.** On complète les différentes lignes non renseignées dans l'algorithme pour qu'après exécution, la variable N contienne l'année à partir de laquelle, le nombre de produits vendus dépassera pour la première fois 3 000 produits selon ce modèle,

$N \leftarrow 0$
$U \leftarrow 1\,289$
Tant que $U < 3\,000$
    $N \leftarrow N + 1$
    $U \leftarrow 1{,}16 * U$
Fin Tant que
$N \leftarrow 2022 + N$

b. Pour déterminer l'année à partir de laquelle, selon ce modèle, le nombre de produits vendus dépassera pour la première fois 3 000, on cherche le plus petit n tel que $u_n \geqslant 3\,000$.

À la calculatrice on trouve :
$u_5 = 1\,289 \times 1{,}16^5 \approx 2\,707 < 3\,000$ et $u_6 = 1\,289 \times 1{,}16^6 \approx 3\,141 > 3\,000$.

$2022 + 6 = 2028$ donc c'est à partir de 2028 que, selon ce modèle, le nombre de produits vendus dépassera pour la première fois 3 000.