Corrigé du Brevet de technicien supérieur – 10 mai 2021
Étude et réalisation d'agencement

Une piscine municipale doit subir une réhabilitation. Le conseil municipal a donc décidé d'installer un faux-plafond acoustique et a choisi pour cela un modèle de « panneaux courbes » reproduisant une vague.

Exercice 1 — Étude des « panneaux courbes » — 10 points

Partie A : Détermination du nombre de panneaux nécessaires

En disposant la partie linéaire des « panneaux courbes » dans le sens de la largeur, un nombre entier de ces panneaux suffit afin d'équiper le plafond, laissant ainsi un espace le long des murs.

Les dimensions d'un panneau, en mètre, sont de 1,785 et 1,7. La salle a pour dimensions, en mètre, 40 et 35.

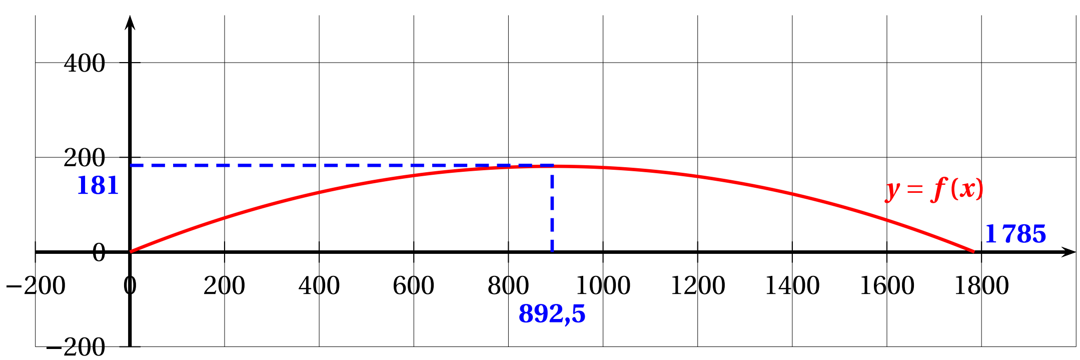
$\dfrac{40}{1{,}785} \approx 22{,}4$, donc on aura 22 panneaux dans la longueur.

$\dfrac{35}{1{,}7} \approx 20{,}6$, donc on aura 20 panneaux dans la largeur.

$22 \times 20 = 440$ donc cette installation nécessite 440 « panneaux courbes ».

Partie B : Étude analytique de la courbe

On modélise le profil d'un « panneau courbe » à l'aide d'une fonction f définie sur l'intervalle $I = [0\,;\,1\,785]$ et dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous :



1. On admet
   - que la courbe $\mathscr{C}$ correspond à une portion de parabole de sommet B(892,5; 181);
   - les résultats suivants : $f(0) = 0$; $f(892{,}5) = 181$; $f(1\,785) = 0$.

a. Interprétation graphique :

- $f(0) = 0$ signifie que la courbe passe par le point de coordonnées $(0\,;\,0)$:
- $f(892{,}5) = 181$ signifie que la courbe passe par le point de coordonnées $(892{,}5\,;\,181)$;
- $f(1\,785) = 0$ signifie que la courbe passe par le point de coordonnées $(1\,785\,;\,0)$

b. Le document n° 4 permet de connaître la valeur 181 ; en effet on a : $\dfrac{362}{2} = 181$.

c. On cherche les valeurs des réels a, b et c tels que pour tout $x \in I$, $f(x) = ax^2+bx+c$.

- $f(0) = 0 \iff a\times 0 + b\times 0 + c = 0$ donc $c = 0$. On en déduit que $f(x) = ax^2 + bx$;
- $f(892{,}5) = 181 \iff a\times 892{,}5^2 + b\times 892{,}5 = 182 \iff 796\,556{,}25a + 892{,}5b = 181$;
- $f(1\,785) = 0 \iff a\times 1\,785^2 + b\times 1\,785 = 0 \iff 1\,785a + b = 0$.

De la 3e égalité, on tire : $b = -1\,785a$.

En remplaçant dans la 2e égalité, on obtient :
$796\,556{,}25a + 892{,}5\,(-1\,785)\,a = 181$ soit $-796\,556{,}25a = 181$ donc $a \approx -0{,}000\,23$.

$b = -1\,785a \approx 0{,}41$

2. Dans la suite, on décide de considérer que la fonction f s'exprime désormais pour tout $x \in I$, par $f(x) = -0{,}000\,227\,2\left(x^2 - 1\,785x\right)$.

a. $f'(x) = -0{,}000\,227\,2\,(2x - 1\,785) = -0{,}000\,454\,4x + 0{,}405\,552$

b. $f'(0) = 0{,}405\,552$ et $f'(1\,785) = -0{,}000\,454\,4 \times 1\,785 + 0{,}405\,552 = -0{,}405\,552$

On en déduit que $f'(0) = -f'(1\,785)$.

Ce résultat était prévisible car le panneau est symétrique (document 2).

Partie C : Détermination de la surface et de la masse totale

Une fois les « panneaux courbes » assemblés, un tissu acoustique en fil de verre est tendu et collé à chaud sur les panneaux. On souhaite connaître la surface totale de tissu nécessaire. Pour cela, il faut calculer la longueur curviligne L de l'arc de chaque panneau.

On admet que $L = \displaystyle\int_0^{1\,785} \sqrt{1 + \left[f'(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t$.

Un logiciel de calcul formel nous donne les résultats suivants :

1	$f(x) := 0{,}000\,23 * (x^2 - 1\,785 * x)$
•	$\rightarrow f(x) := \dfrac{23}{100\,000}\left(x^2 - 1\,785x\right)$
2	Dérivée$(f(x))$
○	$\rightarrow \dfrac{23}{100\,000}(2x - 1\,785)$
3	$g(x) := \text{sqrt}(1 + (f'(x)^2))$
•	$\rightarrow g(x) := \dfrac{1}{100\,000}\sqrt{2\,116x^2 - 3\,777\,060x + 11\,685\,513\,025}$
4	Intégrale$(g(x)$,0,1 785)
○	1 833,95

La valeur arrondie de L à 10^{-2} est donc, en mètre, de 1,83.

La surface totale de tissu nécessaire, en m^2, au m^2 près, est de $1{,}83 \times 1{,}7 \approx 3$.
C'est donc la surface de chaque panneau.

D'après le document 4, le poids de la structure de chaque panneau est de 19 kg/m^2, donc chaque panneau a un poids, en kg, de $3 \times 19 = 57$.

Il y a 440 panneaux, donc la masse totale des 440 « panneaux courbes » est, en kg, de $440 \times 57 = 25\,080$.

Exercice 2 — Étude statistique des suspentes — 10 points

Le système de suspente de chaque panneau est composé de deux tiges filetées, l'une de longueur 500 mm, l'autre de longueur 862 mm et de deux écrous combifix. La ville possède un stock important de chacun de ces éléments dans lequel vont être prélevées les quantités nécessaires.

Partie A : Loi normale

Une tige filetée dite « de 500 mm » est considérée comme conforme lorsque sa longueur appartient à l'intervalle $[499{,}45\ ;\ 500{,}55]$. On note X la variable aléatoire qui, à chaque tige de ce type prélevée au hasard dans le stock, associe sa longueur en mm. On admet que X suit une loi normale de moyenne 500 et d'écart-type 0,25.

1. La probabilité qu'une tige prélevée au hasard dans le stock soit conforme pour la longueur est : $P(499{,}45 \leqslant X \leqslant 500{,}55) \approx 0{,}97$.
2. On sait que si X suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ, alors on a $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$.
   On en déduit que le réel h positif tel que $P(500 - h \leqslant X \leqslant 500 + h) \approx 0{,}95$ est $h = 2\sigma = 0{,}5$.

   Il y a donc en moyenne 95 % des tiges dont la longueur en mm est comprise entre 499,5 et 500,5.

Partie B : Loi binomiale

Dans le stock, 1 % des tiges filetées dites « de 862 mm » sont non conformes. Pour mettre en œuvre le plafond suspendu choisi, on prélève 440 tiges. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 440 tiges. On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 440 tiges, associe le nombre de tiges non conformes pour la longueur.

1. Il n'y a que deux possibilités pour une tige : elle est non conforme, avec une probabilité de $p = 0{,}01$, ou elle est conforme.

   On prélève 440 tiges et le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 440 tiges.

   Donc la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 440 tiges, associe le nombre de tiges non conformes pour la longueur suit une loi binomiale de paramètres $n = 440$ et $p = 0{,}01$.
2. La probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux tiges ne soient pas conformes pour la longueur est : $P(Y \leqslant 2) \approx 0{,}184$.
3. $P(Y = 0) = 0{,}012$.

   On peut estimer à 1,2 % la probabilité que toutes les tiges de l'échantillon soient conformes.

Partie C : Intervalle de confiance

Dans cette question, on s'intéresse au diamètre des écrous, exprimé en millimètres. Un écrou est jugé conforme si son diamètre appartient à l'intervalle [5,98 ; 6,01]. On souhaite estimer la proportion inconnue notée p d'écrous non conformes dans le stock. Pour la déterminer, on prélève au hasard et avec remise un échantillon de 50 écrous dans le stock et on mesure leur diamètre. Les résultats sont donnés ci-dessous :

Diamètre en mm	5,97	5,98	5,997	6,00	6,01	6,02	6,03
Effectif	1	3	9	22	13	1	1

1. D'après le tableau, sur 50 écrous, il y en a 3 en dehors de l'intervalle [5,98 ; 6,01]. Donc $f = \dfrac{3}{50} = 0{,}06$ est une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p d'écrous non conformes.
2. On déduit un intervalle de confiance de la proportion p au risque de 5 %.

$$\begin{aligned} I &= \left[f - 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n-1}}\ ;\ f + 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n-1}}\right] \\ &= \left[0{,}06 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}06\,(1-0{,}06)}{50-1}}\ ;\ 0{,}06 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}06\,(1-0{,}06)}{50-1}}\right] \\ &\approx [0\ ;\ 0{,}126] \end{aligned}$$

3. On considère l'affirmation suivante : « la proportion p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance I obtenu à la question C. 2 ».

Cette affirmation n'est pas vraie : en fait, il y a 95 % de chance que l'intervalle I contienne la proportion p.