∽ Corrigé du BTS Métropole 14 mai 2024 ∾
Groupement B1

Exercice 1 **10 points**

On coule du béton pour faire une dalle. Au début, le béton est mou, puis, au fil du temps, il sèche, et devient plus résistant. On note $f(t)$ la résistance du béton à l'instant t.

$f(t)$ est exprimée en mégapascal (MPa) et t désigne le nombre de jours de séchage.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On admet que f est solution de l'équation différentielle : $(E) \quad y' + 0{,}06y = 2{,}1$.

1. On résout sur $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation différentielle : $(E_0) \quad y' + 0{,}06y = 0$.

   D'après le cours, on sait que l'équation différentielle $y' + ay = 0$ a pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = k\,\mathrm{e}^{-at}$, où $k \in \mathbb{R}$, donc l'équation différentielle (E_0) a pour solutions les fonctions y définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $y(t) = k\,\mathrm{e}^{-0{,}06t}$ où $k \in \mathbb{R}$.
2. On considère la fonction constante g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = 35$.

   $g'(t) + 0{,}06g(t) = 0 + 0{,}06 \times 35 = 2{,}1$ donc la fonction g est solution de l'équation différentielle (E).
3. On en déduit que les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions f définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35$ où $k \in \mathbb{R}$.
4. À l'instant $t = 0$, on considère que la résistance du béton est nulle donc $f(0) = 0$.

   $f(0) = 0 \iff k\,\mathrm{e}^{-0{,}06\times 0} + 35 = 0 \iff k + 35 = 0 \iff k = -35$

   Donc la fonction f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(t) = -35\,\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35$.

Partie B. Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(t) = -35\,\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35$.

1. La résistance du béton après 7 jours de séchage est, en MPa :
   $f(7) = -35\,\mathrm{e}^{-0{,}06\times 7} + 35 \approx 12{,}0$.

   72 heures correspondent à 3 jours. Donc la résistance du béton après 72 heures de séchage est, en MPa : $f(3) = -35\,\mathrm{e}^{-0{,}06\times 3} + 35 \approx 5{,}8$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

   Pour tout réel $t \in [0\ ;\ +\infty[$, on a : $f'(t) = -35 \times (-0{,}06)\,\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 0 = 2{,}1\,\mathrm{e}^{-0{,}06t}$.
3. Pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^{-0{,}06t} > 0$ donc $f'(t) > 0$.

   On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
4. $\displaystyle\lim_{T\to-\infty} \mathrm{e}^{T} = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -0{,}06t = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}06t} = 0$

   On en déduit que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 35$.

   La résistance du béton va tendre vers 35 MPa.

5. Le fabricant du béton affirme que la résistance après 28 jours de séchage correspond à 80 % de la résistance finale.

   Cette résistance est donc de $f(28)$ soit environ 28,5 MPa.

   80 % de 35 correspondent à $0,8 \times 35 = 28$.

   Donc l'affirmation du fabricant est juste.

6. On considère la fonction F définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(t) = \left(\dfrac{1\,750}{3}\right)\mathrm{e}^{-0,06t} + 35t$.

   $$\begin{aligned}F'(t) &= \left(\dfrac{1\,750}{3}\right) \times (-0,06)\,\mathrm{e}^{-0,06t} + 35 = -\left(\dfrac{1\,750 \times 0,006}{3}\right)\mathrm{e}^{-0,06t} + 35\\ &= -35\,\mathrm{e}^{-0,06t} + 35 = f(t)\end{aligned}$$

   Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

7. La valeur moyenne de la résistance du béton sur les 28 premiers jours est :

   $$\begin{aligned}M &= \dfrac{1}{28-0}\int_0^{28} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{28}\left[F(t)\right]_0^{28} = \dfrac{1}{28}\left[F(28) - F(0)\right]\\ &= \dfrac{1}{28}\left[\left(\left(\dfrac{1\,750}{3}\right)\mathrm{e}^{-0,06\times 28} + 35 \times 28\right) - \left(\left(\dfrac{1\,750}{3}\right)\mathrm{e}^{-0,06\times 0} + 35 \times 0\right)\right]\\ &= \dfrac{1}{28}\left[\left(\dfrac{1\,750}{3}\right)\mathrm{e}^{-1,68} + 980 - \dfrac{1\,750}{3}\right] \approx 18\end{aligned}$$

Partie C. Algorithme

On note N le nombre entier correspondant au nombre minimal de jours de séchage permettant d'obtenir une résistance au moins égale à 21 MPa.

1. On complète l'algorithme.

Ligne 1	$t \leftarrow 0$
Ligne 2	$R \leftarrow 0$
Ligne 3	Tant que $R < 21$
Ligne 4	$t \leftarrow t+1$
Ligne 5	$R \leftarrow -35\,\mathrm{e}^{-0,06t} + 35$
Ligne 6	Fin Tant que

2. En utilisant la calculatrice, on trouve : $f(15) \approx 20,8 < 21$ et $f(16) \approx 21,6 > 21$.

   Donc le nombre entier correspondant au nombre minimal de jours de séchage permettant d'obtenir une résistance au moins égale à 21 MPa est $N = 16$.

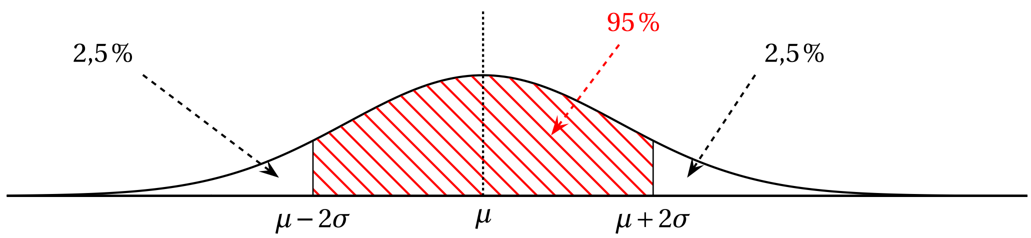
Exercice 2 — 10 points

Partie A. Loi normale

Une entreprise produit des tiges métalliques cylindriques. On note X la variable aléatoire qui, à toute tige prélevée au hasard, associe son diamètre exprimé en millimètres. On admet que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 32$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}6$.

1. La probabilité, arrondie au millième, que le diamètre de la tige prélevée ait un diamètre compris entre 31 et 33 mm est $P(31 \leqslant X \leqslant 33) \approx 0{,}904$.
2. On veut déterminer, au millième près, le réel h tel que : $P(X > 32 - h) = 0{,}975$.

   Dans un premier temps, on peut utiliser le cours ; on sait que :
   $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$.



   On en déduit que $P(X \geqslant \mu - 2\sigma) \approx 0{,}975$, ce qui donne :
   $P(X \geqslant 32 - 2 \times 0{,}6) \approx 0{,}975$, soit : $P(X \geqslant 30{,}8) \approx 0{,}975$.

   On utilise la calculatrice pour être plus précis, et on trouve :
   $P(X \geqslant 30{,}824) \approx 0{,}975$ soit $P(X \geqslant 32 - 1{,}176) \approx 0{,}975$.

   Au millième près, le réel h tel que : $P(X > 32 - h) = 0{,}975$ est $h = 1{,}176$.

Partie B. Loi binomiale

Une entreprise dispose de 15 imprimantes fonctionnant indépendamment les unes des autres. On se place un jour donné. On considère une imprimante quelconque. La probabilité qu'elle tombe en panne ce jour est égale à 0,07. On considère la variable aléatoire Y qui compte le nombre d'imprimantes qui tombent en panne ce jour.

1. Pour une imprimante donnée, il n'y a que deux possibilités : elle tombe en panne (avec une probabilité de $p = 0{,}07$), ou elle ne tombe pas en panne.

   On considère 15 imprimantes qui fonctionnent de façon indépendante, donc la variable aléatoire Y qui compte le nombre d'imprimantes qui tombent en panne ce jour suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0{,}07$.

   Son espérance est $E(Y) = np = 15 \times 0{,}07 = 1{,}05$.
2. La probabilité qu'exactement 12 imprimantes ne tombent pas en panne ce jour est égale à la probabilité qu'exactement 3 imprimantes tombent en panne :

   $P(Y = 3) = \binom{15}{3} \times 0{,}07^3 \times (1 - 0{,}07)^{15-3} \approx 0{,}065$.
3. À la calculatrice, on trouve que la probabilité qu'au moins 3 imprimantes tombent en panne ce jour est : $P(Y \geqslant 3) \approx 0{,}083$.

Partie C. Test d'hypothèse

Une entreprise commercialise des blocs de béton de chanvre. Elle affirme que la résistance moyenne μ de ces blocs est égale à 50 mégapascals (MPa). Désirant vérifier la validité de cette affirmation, un contrôleur met en place un test d'hypothèse bilatéral. On note Z la variable aléatoire qui, à chaque bloc prélevé au hasard dans la production, associe sa résistance, exprimée en MPa. La variable aléatoire Z suit une loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type $\sigma = 0{,}35$.

Soit n un entier naturel. On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de n blocs prélevés dans la production, associe la moyenne des résistances de ces blocs.
On rappelle que la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

L'hypothèse nulle H_0 est : « $\mu = 50$ ». L'hypothèse alternative H_1 est : « $\mu \neq 50$ ». Le seuil de signification du test est fixé à 5 %. On se place dans le cas où $n = 80$.

1. Sous l'hypothèse nulle H_0, la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne $\mu = 50$ et d'écart-type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{0{,}35}{\sqrt{80}}$ soit environ 0,04.
2. On souhaite déterminer sous l'hypothèse H_0, le réel positif h tel que :
   $P(50 - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 50 + h) = 0{,}95$.

   La valeur du nombre réel h est :

0,05	0,04	0,08	0,12

   On sait que, pour une variable aléatoire T qui suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ, on a : $P(\mu - 2\sigma \leqslant T \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$.

   Donc le réel positif h tel que : $P(50 - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 50 + h) = 0{,}95$ est $h = 2 \times 0{,}04 = 0{,}08$.

   Autrement dit : $P\left(\overline{Z} \in [49{,}92 \,;\, 50{,}08]\right) \approx 0{,}95$.
3. On peut énoncer la règle de décision :
   - si la moyenne des résistances des blocs dans l'échantillon n'appartient pas à l'intervalle $[49{,}92 \,;\, 50{,}08]$, alors on rejette l'hypothèse nulle, au risque de 5 % ;
   - sinon, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle.
4. Le contrôleur a prélevé un échantillon de 80 blocs.

   Les résistances obtenues ont été notées dans le tableau ci-dessous.

Résistance mesurée (en MPa)	49,7	49,8	49,9	50	50,2	50,4	50.5
Effectif correspondant	2	5	15	24	17	13	4

   La moyenne de cet échantillon est :
   $$\dfrac{49{,}7 \times 2 + 49{,}8 \times 5 + 49{,}9 \times 15 + 50 \times 24 + 50{,}2 \times 17 + 50{,}4 \times 13 + 50.5 \times 4}{80} \approx 50{,}09.$$

   $50{,}09 \notin [49{,}92 \,;\, 50{,}08]$ donc, au risque 5 %, il convient de rejeter l'hypothèse H_0 pour cet échantillon.