∽ Corrigé du BTS Groupement D2 – 14 mai 2024 ∾
Métropole – Antilles–Guyane – Polynésie

EXERCICE 1 **10 points**

De par la diversité des coccinelles, on peut utiliser deux critères pour reconnaître certaines espèces de coccinelles :

- la taille de la coccinelle
- le type de pronotum (le pronotum est la face dorsale d'une partie du thorax de la coccinelle).

Un type de pronotum répandu est le pronotum dit de type P.

1. On s'intéresse à toutes les coccinelles présentes dans une forêt d'Europe.

Des études statistiques montrent que :

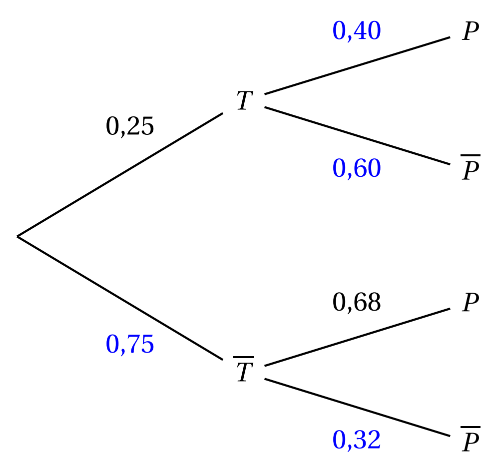
- 25 % des coccinelles présentes dans cette forêt ont une taille inférieure ou égale à 5 mm ; parmi les coccinelles qui ont une taille inférieure ou égale à 5 mm, 40 % ont un pronotum de type P ;
- Parmi les coccinelles présentes dans cette forêt de taille strictement supérieure à 5 mm, 68% ont un pronotum de type P.

Dans cette forêt, on prélève au hasard une coccinelle. On appelle :

- T l'évènement : « la coccinelle a une taille inférieure ou égale à 5 mm » ;
- P l'évènement ;« la coccinelle a un pronotum de type P ».

On note $\overline{T}$ l'évènement contraire de l'évènement T et $\overline{P}$ l'évènement contraire de l'évènement P.

a. On complète l'arbre modélisant la situation décrite ci-dessus.



Pour les questions b. à d., on prélève au hasard une coccinelle dans la forêt.

b. Soit A l'évènement : « la coccinelle prélevée a une taille inférieure ou égale à 5 mm et n'a pas un pronotum de type P ».

$p(A) = p\left(T \cap \overline{P}\right) = p(T) \times p_T\left(\overline{P}\right) = 0{,}25 \times 0{,}60 = 0{,}15$

c. Soit B l'évènement : « la coccinelle prélevée dans la forêt n'a pas un pronotum de type P » ; donc $p(B) = p\left(\overline{P}\right)$.

D'après la formule des probabilités totales :

$p\left(\overline{P}\right) = p\left(T \cap \overline{P}\right) + p\left(\overline{T} \cap \overline{P}\right) = 0{,}15 + 0{,}75 \times 0{,}32 = 0{,}39$

d. La probabilité que la coccinelle prélevée soit de taille inférieure ou égale à 5 mm sachant qu'elle n'a pas un pronotum de type P est :

$$p_{\overline{P}}(T) = \frac{p\left(T \cap \overline{P}\right)}{p\left(\overline{P}\right)} = \frac{0{,}15}{0{,}39} \approx 0{,}385$$

2. Les critères « avoir une taille moyenne inférieure ou égale à 5 mm » et « ne pas avoir un pronotum de type P » caractérisent une espèce particulière : la coccinelle à deux points.

On appelle X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 10 coccinelles prélevées au hasard dans cette forêt, associe le nombre de coccinelles à deux points dans l'échantillon. La population de coccinelles de la forêt est suffisamment importante pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise. On admet que la probabilité de prélever au hasard dans la forêt étudiée une coccinelle à deux points est égale à 0,15.

a. La loi suivie par la variable aléatoire X est une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}15$.

b. On prélève au hasard 10 coccinelles dans la forêt étudiée.

La probabilité d'avoir au moins une coccinelle à deux points dans le prélèvement est : $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \times 0{,}15^0 \times (1 - 0{,}15)^{10-0} \approx 0{,}803$

3. On considère un élevage de coccinelles. On note L la variable aléatoire qui, à chaque coccinelle de l'élevage associe sa taille. On estime que cette taille exprimée en mm suit la loi uniforme sur l'intervalle $[3\,;\,6]$.

a. On prélève au hasard une coccinelle dans cet élevage.

La probabilité que sa taille soit comprise entre 4 mm et 5 mm est :

$p(4 \leqslant L \leqslant 5) = \dfrac{5-4}{6-3} = \dfrac{1}{3}$.

b. La taille moyenne, en mm, des coccinelles dans cet élevage est :

$E(L) = \dfrac{3+6}{2} = 4{,}5$.

4. On s'intéresse ici à la ponte d'une espèce particulière de coccinelles : les coccinelles à deux points. On modélise le nombre d'œufs par ponte à l'aide d'une variable aléatoire U qui suit la loi normale d'espérance égale à 35 et d'écart-type égal à 6.

a. Le nombre moyen d'œufs par ponte d'une coccinelle à deux points est : $\mu = 35$.

b. À la calculatrice, on trouve $p(31 \leqslant U \leqslant 39) \approx 0{,}495$.

c. Si une variable aléatoire U suit la loi normale de paramètres μ et σ, on sait que $p(\mu - 2\sigma \leqslant U \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}85$.

Ici $\mu = 35$ et $\sigma = 6$, donc $p(35 - 2 \times 6 \leqslant U \leqslant 35 + 2 \times 6) \approx 0{,}95$.

Le nombre entier h tel que : $p(35 - h \leqslant U \leqslant 35 + h) \approx 0{,}95$ est $h = 12$.

Il y a donc 95 % de chance que le nombre moyen d'œufs par ponte d'une coccinelle à deux points soit entre $35 - 12 = 23$ et $35 + 12 = 47$.

5. Une autre espèce spécifique est utilisée dans la lutte contre l'infestation des pucerons. Michel a créé un mur végétalisé. Avec effroi, il constate une infestation de pucerons. Sachant que les larves de cette espèce spécifique de coccinelles dévorent un grand nombre de pucerons, il en commande un lot de 80 larves pour traiter le mur. Le vendeur annonce que la durée de vie de ces larves, en jours, suit la loi normale d'espérance $m = 20$ et d'écart-type $\sigma = 3$.

Michel constate que la durée de vie moyenne des larves de son lot n'est que de 18 jours.

L'intervalle de confiance de la moyenne est :

$$I = \left[m - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ m + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[20 - 1{,}96\frac{3}{\sqrt{80}}\ ;\ 20 + 1{,}96\frac{3}{\sqrt{80}}\right]$$

$$\approx [19{,}34\ ;\ 20{,}66]$$

On définit un test bilatéral d'hypothèse nulle (H_0) : $\mu = 20$ et donc d'hypothèse alternative (H_1) : $\mu \neq 20$.

On peut énoncer la règle de décision :

- si la moyenne des durées de vie des larves de l'échantillon n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation I, alors on rejette l'hypothèse nulle, au risque de 5 % ;
- sinon, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle.

La durée de vie moyenne des larves de son lot n'est que de 18 jours et $18 \notin I$.

Donc on peut rejeter (H_0) et remettre en question l'annonce du vendeur au seuil de confiance de 95 %.

EXERCICE 2 — 10 points

Dans une usine agroalimentaire. il y a une seule ligne de production. qui fonctionne en continu. Elle peut fabriquer deux variétés M_1 et M_2 d'un même produit, qui diffèrent par leur teneur en matière grasse :

- la variété M_1 correspond à une teneur idéale en matière grasse de 8,6 %, soit 0,086 ;
- la variété M_2 correspond à une teneur idéale en matière grasse de 15,2 %,soit 0,152.

La ligne était réglée jusqu'alors pour produire la variété M_1. On injecte continûment de la matière grasse dans le produit en fabrication, sans arrêter la ligne de production, jusqu'à obtenir la variété M_2. Durant cette phase de transition, la production est recyclée.

La variété M_2 est considérée commercialisable par le service qualité dès que sa teneur en matière grasse dépasse 14,9 %, soit 0,149.

Partie A

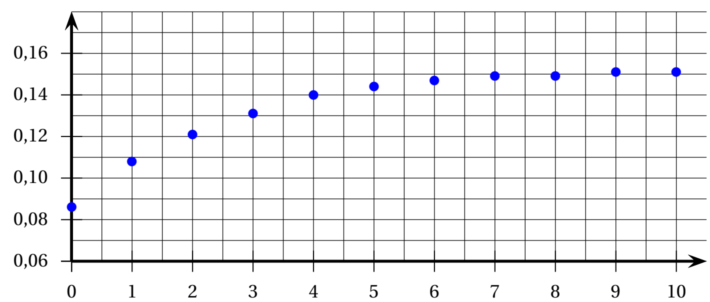
La phase de transition pour passer de la variété M_1 à la variété M_2 est lancée. Un prélèvement est réalisé toutes les minutes pour mesurer la teneur en matière grasse du produit (le temps $t = 0$ correspond au démarrage de la période de transition).

Les résultats sont rassemblés dans le tableau ci-dessous :

Temps t_i (en minutes)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Teneur en matière grasse y_i	0,086	0,108	0,121	0,131	0,14	0,144	0,147	0,149	0,149	0,151	0,151

1. Le nuage de points $(t_i\ ;\ y_i)$ est représenté sur le graphique ci-dessous.

Les points du nuage ne sont pas alignés donc un ajustement linéaire ne paraît pas approprié.



2. On pose $z_i = \ln(0{,}152 - y_i)$.

Le tableau ci-dessous donne certaines valeurs de z_i arrondies à 10^{-3} :

t_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_i	$-2{,}718$	z_1	z_2	$-3{,}863$	$-4{,}423$	$-4{,}828$	$-5{,}298$	$-5{,}809$	$-5{,}809$	$-6{,}908$	$-6{,}908$

a. Pour $t = 1$, $y_1 = 0{,}108$ donc $z_1 = \ln(0{,}152 - 0{,}108) = \ln(0{,}044) \approx -3{,}124$.

Pour $t = 2$, $y_2 = 0{,}121$ donc $z_2 = \ln(0{,}152 - 0{,}121) = \ln(0{,}031) \approx -3{,}474$

b. À l'aide de la calculatrice, on détermine par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement du nuage de points $(t_i\ ;\ z_i)$:
$z = -0{,}435t - 2{,}658$.

c. Pour cette question, on prendra $a = -0{,}44$ et $b = -2{,}7$.

On détermine une expression de la fonction y ajustant le nuage de points $(t_i\ ;\ y_i)$ dans le cadre de cette modélisation.

On a $z = -0{,}44t - 2{,}7$. Or $z = \ln(0.152 - y)$ donc $-0{,}44t - 2{,}7 = \ln(0.152 - y)$, soit $\mathrm{e}^{-0{,}44t-2{,}7} = 0{,}152 - y$, ou encore $y = 0{,}152 - \mathrm{e}^{-2{,}7} \times \mathrm{e}^{-0{,}44t}$.

$\mathrm{e}^{-2{,}7} \approx 0{,}067$ donc on peut prendre $y = 0{,}152 - 0{,}067\,\mathrm{e}^{-0{,}44t}$.

Partie B

1. Soit la fonction C définie sur $[0\,;\,10]$ par : $C(t) = 0{,}152 - 0{,}067\,\mathrm{e}^{-0{,}44t}$.

   On admet que la fonction C modélise la teneur en matière grasse du produit (nombre entre 0 et 1) en fonction du temps en minutes, décompté depuis le démarrage de la période de transition.

   a. $C(2) \approx 0{,}124$

   Donc au bout de 2 minutes, la teneur en matière grasse est d'environ 12,4 %.

   b. $C'(t) = 0 - 0{,}067 \times (-0{,}44)\,\mathrm{e}^{-0{,}44t} = 0{,}294\,8\,\mathrm{e}^{-0{,}33t}$

   Pour tout t, $\mathrm{e}^{-0{,}44t} > 0$ donc $C'(t) > 0$; la fonction C est strictement croissante sur $[0\,;\,10]$.

   Comme on injecte continûment de la matière grasse dans le produit en fabrication, c'est normal que la teneur en matière grasse augmente au fil du temps.

2. On considère l'algorithme ci-contre rédigé en langage naturel.

   M correspond au temps, et D à la teneur en matière grasse qui est de 0,085 au départ, ce qui est la teneur de la variété M_1.

M prend la valeur 0
D prend la valeur 0,085
Tant que $D \leqslant 0{,}149$
M prend la valeur $M + 1$
D prend la valeur $C(M)$
Fin Tant que
Renvoyer M

   On fait tourner la boucle tant que la teneur est inférieure ou égale à 0,149.

   La valeur numérique renvoyée par cet algorithme lorsqu'il a été exécuté, est donc le temps nécessaire pour que la teneur soit supérieure à 0,149, c'est-à-dire dès qu'on a obtenu une variété M_2 commercialisable.

3. **a.** On admet que l'équation $C(t) = 0{,}149$ admet une unique solution, notée T, sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.À la calculatrice, on obtient :

   $$\left.\begin{array}{l} C(7) \approx 0{,}148\,92 < 0{,}149 \\ C(8) \approx 0{,}150\,02 > 0{,}149 \end{array}\right\} \Longrightarrow 7 < T < 8$$

   $$\left.\begin{array}{l} C(7) \approx 0{,}148\,92 < 0{,}149 \\ C(7{,}1) \approx 0{,}149\,05 > 0{,}149 \end{array}\right\} \Longrightarrow 7{,}0 < T < 7{,}1$$

   $$\left.\begin{array}{l} C(7{,}05) \approx 0{,}148\,99 < 0{,}149 \\ C(7{,}06) \approx 0{,}149\,001 > 0{,}149 \end{array}\right\} \Longrightarrow 7{,}05 < T < 7{,}06$$

   Donc 7,06 est une valeur approchée de T au centième.

   b. T vaut environ 7,06 minutes, soit en secondes : $7{,}06 \times 60 = 423{,}6$.

   Il faut donc attendre 424 secondes après le démarrage de la phase de transition afin d'obtenir une variété M_2 commercialisable.

Partie C

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~10]$ par $f(t) = 0{,}152 - 0{,}062\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$.
Le génie des procédés permet de considérer que la fonction constitue une autre modélisation acceptable de la teneur en matière grasse du produit en fonction du temps t en minutes qui s'est écoulé à partir du démarrage de la période de transition.
On admet que le plus grand nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0~;~10]$ tel que $f(t) \leqslant 0{,}149$ vaut approximativement 6 au dixième près.

1. On considère la fonction F définie sur $[0~;~10]$ par $F(t) = 0{,}152t + 0{,}124\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$.

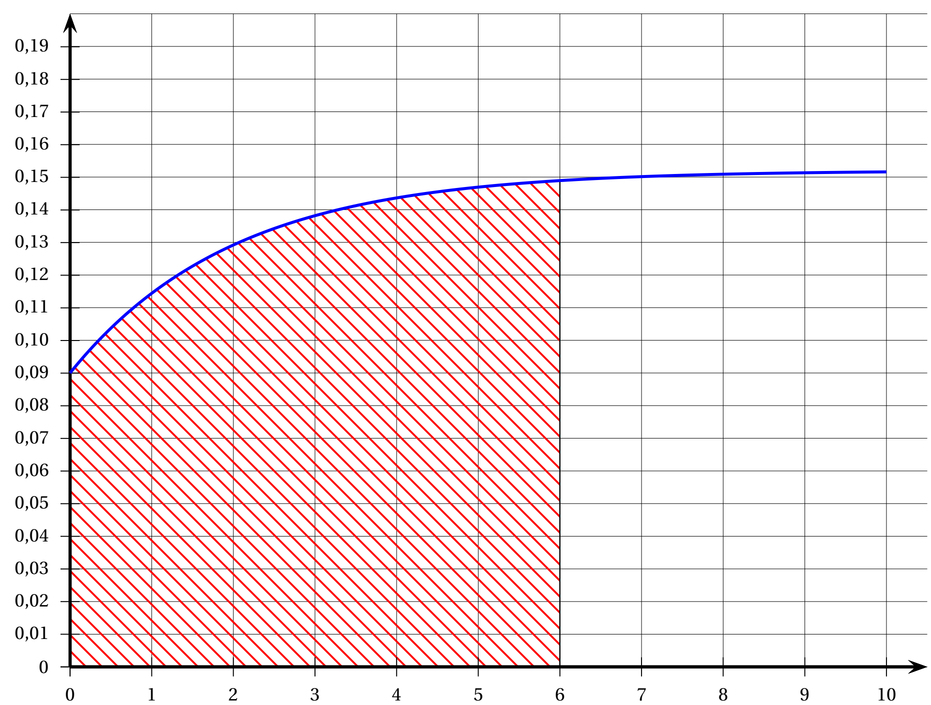
$F'(t) = 0{,}152 + 0{,}124 \times (-0{,}5)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 0{,}152 - 0{,}062\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} = f(t)$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~10]$.

2. **a.** $\displaystyle\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = \left[F(t)\right]_0^6 = F(6) - F(0)$

$= \left(0{,}152 \times 6 + 0{,}124\,\mathrm{e}^{-0{,}5\times 6}\right) - \left(0{,}152 \times 0 + 0{,}124\,\mathrm{e}^{-0{,}5\times 0}\right)$
$= 0{,}912 + 0{,}124\,\mathrm{e}^{-3} - 0{,}124 = 0{,}788 + 0{,}124\,\mathrm{e}^{-3} \approx 0{,}794\,2$

b. On hachure sur le graphique le domaine dont l'aire est égale à la valeur de cette intégrale.



c. On note $m = \dfrac{1}{6}\displaystyle\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t$. Or $\displaystyle\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t \approx 0{,}794\,2$ donc $m \approx 0{,}132$.

On peut donc dire que la teneur moyenne en graisse sur les 6 premières minutes est de 13,2 %.