BTS Métropole 18 mai 2026

Services informatiques aux organisations

Épreuve de mathématiques approfondies

– Corrigé –

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé
L'usage de calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé
Durée : 2 heures

Exercice 1 — 8 points

Les deux parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Une image numérique en noir et blanc est composée de pixels, chaque pixel est représenté par un nombre x allant de 0 à 1.
Le 0 représente le blanc et le 1 représente le noir, les valeurs intermédiaires allant du clair au foncé.
On s'intéresse aux fonctions permettant de modifier le contraste d'une image en noir et blanc; une telle fonction doit vérifier les trois propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$ (le blanc reste blanc);
- $f(1) = 1$ (le noir reste noir);
- la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ (un pixel plus clair qu'un autre le reste après application de la fonction).

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $g(x) = x\mathrm{e}^{x^2-1}$.
On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $g'(x) = \mathrm{e}^{x^2-1}(1+2x^2)$.

> La fonction g est dérivable sur $[0\,;\,1]$ comme produit de fonctions dérivables. En posant $u(x) = x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{x^2-1}$, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2-1}$. Donc :
> $g'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x) = \mathrm{e}^{x^2-1} + x \times 2x\mathrm{e}^{x^2-1} = \left(1+2x^2\right)\mathrm{e}^{x^2-1}$.

2. **a.** Justifier que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

> Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $\mathrm{e}^{x^2-1} > 0$ (exponentielle strictement positive) et $1+2x^2 \geqslant 1 > 0$. Donc $g'(x) > 0$ sur $[0\,;\,1]$, ce qui prouve que g est strictement croissante sur cet intervalle.

b. Est-ce que la fonction g vérifie les trois propriétés nécessaires pour être une fonction permettant de modifier le contraste d'une image en noir et blanc? Justifier la réponse.

- $g(0) = 0 \times \mathrm{e}^{0-1} = 0$, donc $g(0) = 0$ (le blanc reste blanc) ;
- $g(1) = 1 \times \mathrm{e}^{1-1} = 1 \times \mathrm{e}^{0} = 1$, donc $g(1) = 1$ (le noir reste noir) ;
- g est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$ (question précédente).

De plus, g étant continue, croissante avec $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$, on a $g(x) \in [0\,;\,1]$ pour tout $x \in [0\,;\,1]$. La fonction g vérifie donc les trois propriétés nécessaires et peut être utilisée pour modifier le contraste d'une image.

Une fonction f augmente le contraste d'une image si :

$$\int_{0,5}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{0,5} f(x)\,\mathrm{d}x - 0,25 \geq 0.$$

On dit sinon que la fonction f diminue le contraste.

3. **a.** Vérifier que la fonction G par $G(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-1}$ définie sur $[0\,;\,1]$ est une primitive de la fonction g sur cet intervalle.

La fonction G est dérivable sur $[0\,;\,1]$ et :
$G'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2x \times \mathrm{e}^{x^2-1} = x\mathrm{e}^{x^2-1} = g(x)$.
Donc G est bien une primitive de g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

b. La fonction g diminue-t-elle ou augmente-t-elle le contraste ? Justifier.

On calcule successivement les deux intégrales à l'aide de la primitive G.
$\displaystyle\int_{0}^{0,5} g(x)\,\mathrm{d}x = G(0,5) - G(0) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-3/4} - \mathrm{e}^{-1}\right) \approx 0,052.$
$\displaystyle\int_{0,5}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = G(1) - G(0,5) = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-3/4}\right) \approx 0,264.$
Donc :
$\displaystyle\int_{0,5}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{0,5} g(x)\,\mathrm{d}x - 0,25 \approx 0,264 - 0,052 - 0,25 \approx -0,038 < 0.$
La fonction g **diminue** le contraste de l'image.

Partie B

On applique un filtre qui diminue de 6 % le contraste global d'une image à chaque itération. Pour tout entier naturel n, on note u_n le contraste global de l'image après n itérations du filtre sur une image dont le contraste initial est de 0,81. Ainsi, $u_0 = 0,81$.

1. **a.** Calculer u_1.

Diminuer de 6 % revient à multiplier par $1 - 0,06 = 0,94$. Donc :
$u_1 = 0,81 \times 0,94 = 0,7614$.

b. Vérifier que $u_2 = 0{,}715716$.

$u_2 = u_1 \times 0{,}94 = 0{,}7614 \times 0{,}94 = 0{,}715716$.

2. **a.** Justifier que la suite (u_n) est géométrique. Déterminer sa raison.

Le filtre diminue le contraste de 6 % à chaque itération, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}94 \times u_n$. La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 0{,}94$ et de premier terme $u_0 = 0{,}81$.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

Pour une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0, on a $u_n = u_0 \times q^n$. Donc :
$u_n = 0{,}81 \times 0{,}94^n$.

c. Déterminer à partir de combien d'itérations le contraste global de l'image sera inférieur à 0,5.

On cherche le plus petit entier n tel que $u_n < 0{,}5$, soit :
$0{,}81 \times 0{,}94^n < 0{,}5 \iff 0{,}94^n < \dfrac{0{,}5}{0{,}81} \approx 0{,}6173$.
Comme $\ln(0{,}94) < 0$, en passant au logarithme l'inégalité change de sens :
$n \times \ln(0{,}94) < \ln(0{,}6173) \iff n > \dfrac{\ln(0{,}6173)}{\ln(0{,}94)} \approx 7{,}79$.
Le plus petit entier convenant est $n = 8$.
Vérification : $u_7 \approx 0{,}525 > 0{,}5$ et $u_8 \approx 0{,}494 < 0{,}5$.
Il faut donc **au moins** 8 **itérations** pour que le contraste devienne inférieur à 0,5.

Exercice 2 — 12 points

Les trois parties A, B et C sont indépendantes.
Les résultats seront arrondis si nécessaire au millième.

Partie A

Un pare-feu analyse les connexions réseau pour détecter les attaques.
1 % des connexions sont malveillantes, c'est-à-dire qu'elles correspondent à une attaque réelle.
Dans sa configuration actuelle, le pare-feu détecte correctement une attaque avec une probabilité de 0,99.
Mais il a aussi un taux de faux positifs de 5 pour 1000, c'est-à-dire que la probabilité qu'il signale à tort une connexion comme malveillante alors qu'elle est légitime est de 0,005.
On choisit au hasard une connexion et on définit les événements suivants :

- A : « la connexion choisie correspond à une attaque » ;

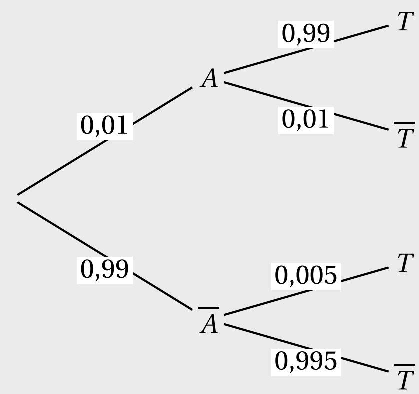
- T : « le pare-feu considère que la connexion correspond à une attaque ».

On note $\overline{A}$ l'événement contraire de l'événement A.

1. **a.** Déterminer $P(A)$.

> D'après l'énoncé, 1 % des connexions sont malveillantes, donc :
> $P(A) = 0{,}01$.

b. Modéliser cette situation par un arbre pondéré.



2. Calculer $P(T)$.

> D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\left\{A\,;\overline{A}\right\}$:
> $P(T) = P(A \cap T) + P\left(\overline{A} \cap T\right) = P(A) \times P_A(T) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(T)$.
> $P(T) = 0{,}01 \times 0{,}99 + 0{,}99 \times 0{,}005 = 0{,}0099 + 0{,}00495 = 0{,}01485$.
> Donc $P(T) \approx 0{,}015$.

3. L'administrateur du pare-feu estime qu'il est bien configuré si, lorsqu'une connexion est considérée comme une attaque par le pare-feu, il y a 95 % de chance que cette connexion soit effectivement une attaque.

a. Calculer $P_T(A)$.

> Par définition de la probabilité conditionnelle :
> $P_T(A) = \dfrac{P(A \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}01 \times 0{,}99}{0{,}01485} = \dfrac{0{,}0099}{0{,}01485} \approx 0{,}667$.

b. Le pare-feu est-il bien configuré ? Justifier.

On a $P_T(A) \approx 0{,}667$, soit environ 66,7 %. Cette probabilité est nettement inférieure au seuil de 95 % requis. Le pare-feu **n'est donc pas bien configuré** : environ un tiers des connexions signalées comme malveillantes sont en réalité légitimes.

Partie B

L'administrateur du pare-feu analyse fréquemment l'historique des connexions. Pour cela, il prélève au hasard à chaque fois un échantillon de 50 connexions dans l'historique. On considère que l'historique est suffisamment grand pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise.
On suppose dans cette partie que la probabilité qu'une connexion soit malveillante est de 0,06.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 50 connexions, associe le nombre de connexions malveillantes.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

- On répète 50 fois, de façon indépendante, la même expérience à deux issues : « la connexion est malveillante » ou « la connexion n'est pas malveillante ».
- On appelle **succès** l'événement « la connexion est malveillante », de probabilité $p = 0{,}06$.
- La variable aléatoire X comptabilise le nombre de succès parmi les 50 connexions choisies.

Donc $X \sim \mathscr{B}(50\,;\,0{,}06)$.

2. a. Calculer la probabilité qu'exactement deux connexions soient malveillantes.

La probabilité qu'exactement deux connexions soient malveillantes est :
$P(X=2) = \binom{50}{2} \times 0{,}06^2 \times (1-0{,}06)^{50-2} \approx 0{,}226.$

b. Calculer la probabilité qu'au moins une connexion soit malveillante.

La probabilité qu'au moins une connexion soit malveillante est :
$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1-(1-0{,}06)^{50} = 1 - 0{,}94^{50} \approx 0{,}955.$

3. Déterminer le nombre moyen de connexions malveillantes par échantillon de 50 connexions.

$E(X) = np = 50 \times 0{,}06 = 3$.

En moyenne, un échantillon de 50 connexions contient 3 connexions malveillantes.

Partie C

Les attaquants sont capables de s'adapter à la configuration d'un pare-feu. La durée d'efficacité, exprimée en mois, d'une configuration pour un pare-feu, est modélisée par une variable aléatoire Y suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
La probabilité qu'une configuration ait une durée d'efficacité totale supérieure à 6 mois est égale à 0,4.

1. Déterminer la valeur du paramètre λ.

Pour une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, on a $P(Y > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ pour tout $t \geqslant 0$. Donc :

$\mathrm{e}^{-6\lambda} = 0{,}4 \iff -6\lambda = \ln(0{,}4) \iff \lambda = \dfrac{-\ln(0{,}4)}{6} = \dfrac{\ln(2{,}5)}{6} \approx 0{,}153$.

2. Quelle est la valeur moyenne, calculée en mois, de la durée d'efficacité totale d'une configuration ?

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance vaut $E(Y) = \dfrac{1}{\lambda}$. Donc :

$E(Y) = \dfrac{1}{\lambda} \approx \dfrac{1}{0{,}153} \approx 6{,}55$ mois.

La durée d'efficacité moyenne d'une configuration est d'environ 6,55 mois.