Corrigé du BTS Opticien Lunetier – mai 2022

Métropole

EXERCICE 1 **10 points**

Un étudiant effectue son stage dans une boutique de lunetterie.

PARTIE A - Probabilités conditionnelles.

Cette boutique est spécialisée dans les montures réalisées à partir de bois recyclé.

Elle propose deux modèles de montures :
-les montures SURF, réalisées avec le bois d'anciennes planches de surf ;
-les montures TRADITION, réalisées avec le bois provenant d'un ébéniste.

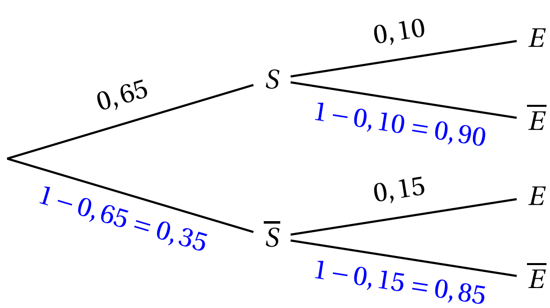
Un client souhaitant acheter des montures a le choix entre deux formules :
-la formule PERSONNELLE : les montures sont confectionnées sur mesure ;
-la formule IMMEDIAT : le client achète un modèle déjà confectionné.

On dispose des informations suivantes :

- 65 % des montures vendues sont des montures SURF.
  Parmi elles, 10 % ont été vendues selon la formule PERSONNELLE, les autres ont été vendues selon la formule IMMEDIAT.
- 35 % des montures vendues sont des montures TRADITION.
  Parmi elles, 15 % ont été vendues selon la formule PERSONNELLE, les autres ont été vendues selon la formule IMMEDIAT.

On choisit au hasard une monture ayant été vendue. On définit les évènements :
S : il s'agit d'une monture SURF.
E : il s'agit d'une monture ayant été vendue selon la formule PERSONNELLE.

1. On représente la situation à l'aide d'un arbre pondéré.



2. $P(S \cap E) = P(S) \times P_S(E) = 0,65 \times 0,10 = 0,065$

3. D'après la formule des probabilités totales :
$P(E) = P(S \cap E) + P\left(\overline{S} \cap E\right) = 0,065 + 0,35 \times 0,15 = 0,1175$

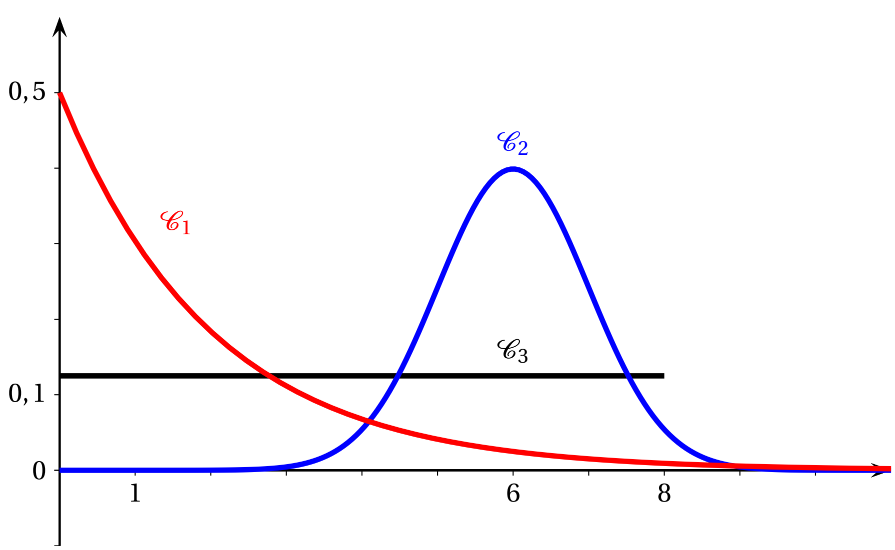
4. La monture a été vendue selon la formule PERSONNELLE.
La probabilité qu'il s'agisse d'une monture SURF est :
$P_E(S) = \dfrac{P(S \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0,065}{0,1175} \approx 0,553$

PARTIE B - Lois de probabilités

Dans cette partie, on étudie les temps d'attente des clients selon les jours de la semaine. On a recueilli les observations ci-dessous.

	Description de la situation	Loi de probabilité décrivant le temps d'attente exprimé en minutes.
Mardi, Jeudi	Peu de clients. Peu d'attente.	Loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,5$.
Mercredi, Vendredi	Imprévisible. Un client peut attendre beaucoup, un peu, ou pas du tout.	Loi uniforme sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$.
Samedi	Beaucoup de vendeurs, beaucoup de clients.	Loi normale de moyenne m et d'écart-type $\sigma = 1$ minute.
Dimanche, Lundi	BOUTIQUE FERMÉE	

On a représenté ci-dessous les représentations graphiques des densités des trois lois décrites dans le tableau ci-dessus.



1. On complète le tableau ci-dessous.

	Description de la situation	Loi de probabilité décrivant le temps d'attente exprimé en minutes.	Courbe correspondante	Paramètres
Mardi, Jeudi	Peu de clients. Peu d'attente.	Loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,5$.	$\mathscr{C}_1$	$\lambda = 0,5$
Mercredi, Vendredi	Imprévisible. Un client peut attendre beaucoup, un peu, ou pas du tout.	Loi uniforme sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.	$\mathscr{C}_3$	$a = 0$ $b = 8$
Samedi	Beaucoup de vendeurs, beaucoup de clients.	Loi normale de moyenne m et d'écart-type $\sigma = 1$ minute.	$\mathscr{C}_2$	$m = 6$ $\sigma = 1$ minute

Explications

- Une loi uniforme est représentée par un segment de droite donc $\mathscr{C}_3$.
  Le segment est tracé sur $[0\,;\,8]$ donc $a = 0$ et $b = 8$.
- Une loi normale est représentée par une courbe « en cloche » donc $\mathscr{C}_2$.
  La courbe $\mathscr{C}_2$ est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = 6$ donc $m = 6$.
- La loi exponentielle est représentée par la 3^e^ courbe soit $\mathscr{C}_1$.

2. Le mardi, la variable aléatoire donnant le temps d'attente suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 5$. Le temps d'attente moyen est donné par l'espérance mathématique de cette variable aléatoire $\dfrac{1}{\lambda}$ soit en minutes, $\dfrac{1}{0,5} = 2$.

3. Le mercredi, la variable aléatoire$X$ donnant le temps d'attente suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;\,8]$. Donc la probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 6 minutes est $P(X < 6) = \dfrac{6-0}{8-0} = \dfrac{3}{4} = 0,75$.

4. Le samedi, la variable aléatoire$X$ donnant le temps d'attente suit une loi normale de moyenne $m = 6$ et $\sigma = 1$. La probabilité que le temps d'attente soit compris entre 4 et 8 minutes est (d'après le cours) :
$P(4 \leqslant X \leqslant 8) = P(6 - 2 \times 1 \leqslant X \leqslant 6 + 2 \times 1) = P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.

PARTIE C - Suites numériques

La boutique vend également des appareils auditifs.

On constate que le nombre d'appareils vendus annuellement augmente de 12 % chaque année. On modélise cette évolution par une suite (u_n).

Ainsi, selon cette modélisation, u_n représente le nombre d'appareils vendus durant l'année $2010+n$.
Par exemple, u_7 représente le nombre d'appareils vendus durant l'année 2017.
On suppose que l'on a $u_0 = 50$.

1. $u_1 = u_0 + u_0 \times \dfrac{12}{100} = 50 + 50 \times \dfrac{12}{100} = 56$
2. L'année 2012 correspond à $n = 2$.
   $56 + 56 \times \dfrac{12}{100} = 62,72$ donc le nombre d'appareils auditifs vendus en 2012 est égal à 63.
3. Augmenter de 12 %, c'est multiplier par $1 + \dfrac{12}{100}$ soit $1,12$. Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,12$ et de premier terme $u_0 = 50$.
4. (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,12$ et de premier terme $u_0 = 50$ donc, d'après le cours, pour tout entier n on a : $u_n = u_0 \times q^n$ donc $u_n = 50 \times 1,12^n$.
   On résout l'inéquation d'inconnue N : $u_N > 200$.
   $$u_N > 200 \iff 50 \times 1,12^N > 200 \iff 1,12^N > 4 \iff \ln\left(1,12^N\right) > \ln(4)$$
   $$\iff N\ln(1,12) > \ln(4) \iff N > \dfrac{\ln(4)}{\ln(1,12)}$$
   Or $\dfrac{\ln(4)}{\ln(1,12)} \approx 12,2$ donc $N \geqslant 13$.
   $2010 + 13 = 2023$, donc c'est à partir de 2023 que le nombre d'appareils vendus sera supérieur à 200.

PARTIE D - Intervalle de confiance

On souhaite estimer la proportion p de personnes intéressées par la commercialisation de lunettes connectées. On réalise un sondage auprès d'un échantillon de 200 clients. La clientèle est suffisamment importante pour assimiler cet échantillon à un tirage avec remise.
Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon ainsi prélevé, associe la fréquence, dans cet échantillon, des clients intéressés par la commercialisation de lunettes connectées. On admet que F suit la loi normale de moyenne p inconnue dont l'écart-type est égal à $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{200}}$.

Lors du sondage, 45 clients sur 200 ont dit être intéressés par la vente de lunettes connectées.

1. Une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p est $f = \dfrac{45}{200} = 0,225$.
2. Un intervalle de confiance centré sur f de la proportion p avec le niveau de confiance de 95 %, en arrondissant les bornes de l'intervalle à 10^{-3}, est :
   $$I_{95} = \left[f - 1,96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f + 1,96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\right]$$
   $$= \left[0,225 - 1,96\sqrt{\dfrac{0,225 \times 0,775}{200}}\ ;\ 0,225 + 1,96\sqrt{\dfrac{0,225 \times 0,775}{200}}\right] \approx [0,167\ ;\ 0,283]$$
3. L'intervalle I_{95} a une probabilité supérieure à 95 % de contenir la proportion p.

EXERCICE 2 **10 points**

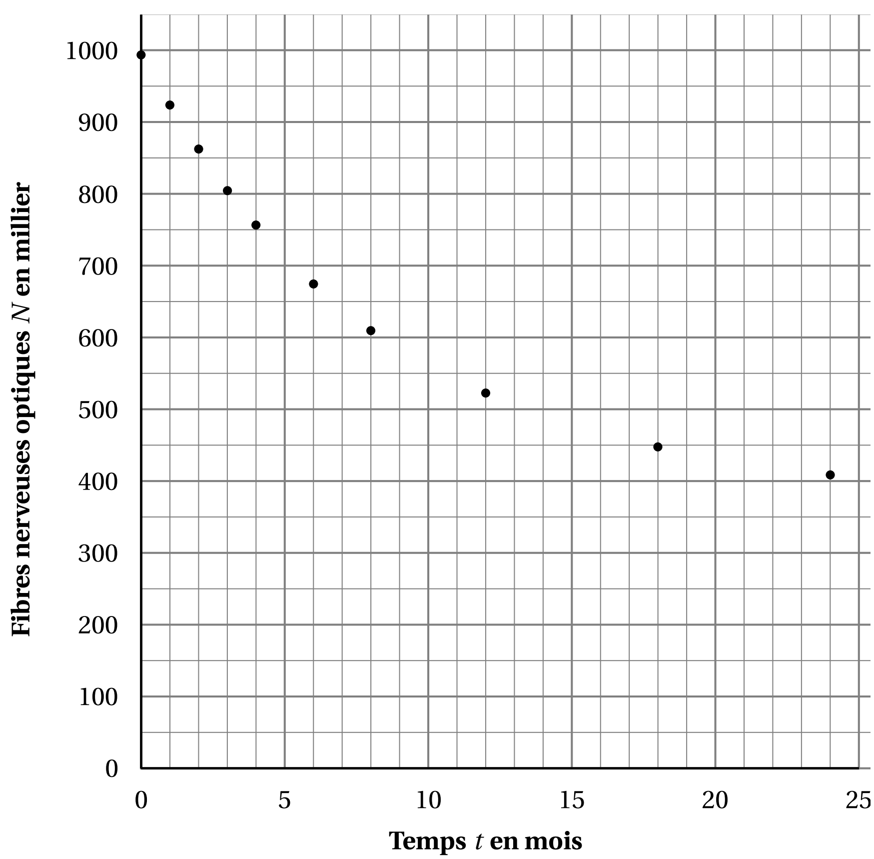
Le glaucome est une maladie dégénérative du nerf optique qui entraîne une perte progressive de la vision. Cette maladie entraîne la dégénérescence des fibres nerveuses chargées de transmettre au cerveau les informations issues de la rétine.

PARTIE A - Statistique à deux variables.

La technique d'imagerie Tomographie en Cohérence Optique (OCT) permet de scanner la rétine et le nerf optique : en mesurant l'épaisseur des fibres du nerf optique on peut en déduire le nombre de fibres nerveuses optiques d'une personne.
On a mesuré l'évolution du nombre N de fibres nerveuses optiques, en millier, en fonction du temps t, exprimé en mois, d'une personne atteinte d'un glaucome aigu.
L'instant $t = 0$ représente le moment d'apparition du glaucome aigu.

On obtient les résultats suivants :

Temps t (en mois)	0	1	2	3	4	6	8	12	18	24
Fibres nerveuses optiques N (en millier)	994	924	863	805	757	675	610	523	448	409



1. Les points ne sont pas du tout alignés, donc un ajustement affine de N en t ne semble pas approprié.
2. On décide de procéder à un changement de variable, en posant : $z = \ln(N - 375)$.
   On obtient alors le tableau de valeurs suivant (les résultats ont été arrondis à 10^{-2}).

Temps t (en mois)	0	1	2	3	4	6	8	12	18	24
z	6,43	6,31	6,19	6,06	5,95	5,70	5,46	5,00	4,29	3,53

   a. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite de régression de z en t selon la méthode des moindres carrés, est : $z = -0,120t + 6,428$.

   b. On sait que $z = \ln(N - 375)$. Donc
   $z = -0,120t + 6,428 \iff \ln(N - 375) = -0,120t + 6,428$
   $\iff N - 375 = \mathrm{e}^{-0,120t+6,428} \iff N = \mathrm{e}^{-0,12t} \times \mathrm{e}^{6,428} + 375$
   $\mathrm{e}^{6,428} \approx 619$ donc on a : $N = 619\,\mathrm{e}^{-0,12t} + 375$.

PARTIE B - Résolution d'une équation différentielle

On considère une personne atteinte d'un glaucome aigu.
$y(t)$ désigne le nombre de milliers de fibres nerveuses optiques que possède cette personne t mois après l'apparition du glaucome.
La fonction $y : t \longmapsto y(t)$ modélise donc l'évolution du nombre de milliers de fibres nerveuses optiques au cours du temps.
On admet que y est définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note y' sa dérivée.

On admet que la fonction y est solution de l'équation différentielle $(E) : 2y' + 0,24y = 90$

1. Soit l'équation différentielle $(E_0) : 2y' + 0,24y = 0$
   L'équation différentielle $ay' + by = 0$ a pour solutions les fonctions f définies par $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}$, où $k \in \mathbf{R}$, donc l'équation différentielle (E_0) a pour solutions les fonctions f définies par $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-\frac{0,24}{2}t}$, où $k \in \mathbf{R}$, soit $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-0,12t}$.
2. **a.** Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = 375$.
   $g'(t) = 0$ et $2g'(t) + 0,24g(t) = 0 + 0,24 \times 375 = 90$ donc la fonction g est solution de (E).

   b. Les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc les fonctions f définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-0,12t} + 375$ où $k \in \mathbf{R}$.
3. On sait que, à l'instant $t = 0$, le nombre de fibres nerveuses optiques de la personne est de 994 milliers de fibres.
   $f(0) = 994 \iff k\,\mathrm{e}^{0} + 375 = 994 \iff k = 994 - 375 \iff k = 619$
   La solution cherchée est la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 619\,\mathrm{e}^{-0,12t} + 375$.

PARTIE C- Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(t) = 375 + 619\,\mathrm{e}^{-0,12t}$.

On suppose que l'évolution du nombre de fibres nerveuses optiques de la personne atteinte d'un glaucome peut être modélisée par la fonction f où $f(t)$ représente le nombre de milliers

de fibres nerveuses optiques t mois après l'apparition du glaucome.
On admet que f est une fonction dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Sur $[0\,;\,+\infty[$, on a : $f'(t) = 619 \times (-0,12)\,\text{e}^{-0,12t} = -74,28\,\text{e}^{-0,12t}$.
2. Pour tout réel x, on sait que $\text{e}^{x} > 0$, donc pour tout t, $\text{e}^{-0,12t} > 0$; on en déduit que pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$, on a : $f'(t) < 0$.

   La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} (-0,12t) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{T\to-\infty} \text{e}^{T} = 0$; on en déduit que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \text{e}^{-0,12t} = 0$ et donc que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 375$.

   On peut donc dire que la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f admet la droite d'équation $y = 375$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.
4. On admet qu'un développement limité à l'ordre 2 de la fonction f au voisinage de 0 est donné par : $f(t) = 994 - 74,28t + 4,4568t^2 + t^2\varepsilon(t)$ avec $\displaystyle\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

   Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :

$y = -74,28t + 4,4568t^2$	$\boxed{y = 994 - 74,28t}$	$y = 74,28t - 994$