Corrigé du BTS Opticien–lunetier

14 mai 2024

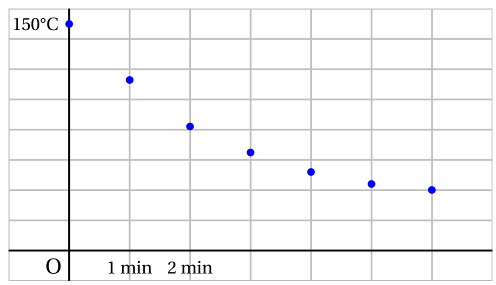
Exercice 1 — 10 points

Pour fabriquer des montures, on chauffe un matériau à 150°C puis on le sort du four et on le laisse refroidir à température ambiante (28°C).

Partie A - Étude d'une série statistique

Pour étudier le refroidissement du matériau, on a réalisé des relevés de température et réalisé un croquis.

Temps t (minutes)	0	1	2	3	4	5	6
Température y (°C)	150	113	82	65	52	44	40



1. Les points du nuage ne sont pas alignés, donc un ajustement affine de y en t n'est pas pertinent.
2. On pose $z = \ln(y-28)$.

   On complète le tableau en arrondissant les valeurs de z au centième.

Temps t (minutes)	0	1	2	3	4	5	6
Température y (°C)	150	113	82	65	52	44	40
$z = \ln(y-28)$	4,80	4,44	3,99	3,61	3,18	2,77	2,48

3. On note r le coefficient de corrélation de la série $(t\,;\,z)$. On sait que $r \approx -0{,}999$.

   a. La corrélation de la série $(t\,;\,z)$ est très bonne car la valeur absolue du coefficient de corrélation est très proche de 1.

   b. Le nuage de points $(t\,;\,z)$ a une allure décroissante car $r < 0$.

4. À l'aide de la calculatrice, on donne une équation de la droite de régression linéaire de z en t, selon la méthode des moindres carrés : $z = -0{,}4t + 4{,}8$.
5. On en déduit une expression de y en fonction de t.

   $z = -0{,}4t + 4{,}8$ et $z = \ln(y-28)$ donc :

   $\ln(y-28) = -0{,}4t + 4{,}8$ donc $y - 28 = \mathrm{e}^{-0{,}4t+4{,}8}$ donc $y = \mathrm{e}^{-0{,}4t} \times \mathrm{e}^{4{,}8} + 28$

   $\mathrm{e}^{4{,}8} \approx 121{,}51$ donc on prendra $y = 122\,\mathrm{e}^{-0{,}4t} + 28$

Partie B - Équation différentielle.

On considère l'équation différentielle : $(E)\ :\ 5y' + 2y = 56$.

1. Soit l'équation différentielle $(E_0)\ :\ 5y' + 2y = 0$.

   L'équation différentielle $ay' + by = 0$ a pour solutions les fonctions f définie par $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}$, donc l'équation différentielle $5y' + 2y = 0$ a pour solutions les fonctions f définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}t}$ soit $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-0{,}4t}$ où k est un réel.
2. Soit A un nombre réel. On considère la fonction constante g, définie par $g(t) = A$.

   Pour que la fonction g soit solution de l'équation différentielle (E) il faut que : $5g'(t) + 2g(t) = 56$.

   $g(t) = A$ et $g'(t) = 0$, donc $2A = 56$ donc $A = 28$.
3. Les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc les fonctions définies par $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-0{,}4t} + A$ soit $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-0{,}4t} + 28$, où k est un réel.
4. $f(0) = 150 \iff k\,\mathrm{e}^0 + 28 = 150 \iff k = 150 - 28 \iff k = 122$

   La fonction f, solution de l'équation différentielle (E), qui vérifie la condition initiale $f(0) = 150$ est donc définie par $f(t) = 122\,\mathrm{e}^{-0{,}4t} + 28$.

Partie C - Étude de fonction

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(t) = 122\,\mathrm{e}^{-0{,}4t} + 28$.

On admet que la fonction f modélise l'évolution de la température du matériau au fil du temps : ainsi, $f(t)$ représente la température, en degrés Celsius, t minutes après la sortie du four.

1. $\displaystyle\lim_{T \to -\infty} \mathrm{e}^T = 0$ et $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} -0{,}4t = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0{,}4t} = 0$

   On en déduit que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f(t) = 28$.

   Ce résultat est cohérent car la température ambiante est de 28°C.
2. On cherche à partir de quel instant la température du matériau devient inférieure à 50°C.

   a. La température du matériau devient inférieure à 50°C signifie que :

   $$f(t) \leqslant 50 \iff 122\,\mathrm{e}^{-0{,}4t} + 28 \leqslant 50 \iff 122\,\mathrm{e}^{-0{,}4t} \leqslant 22 \iff \mathrm{e}^{-0{,}4t} \leqslant \frac{22}{122}$$
   $$\iff \mathrm{e}^{-0{,}4t} \leqslant \frac{11}{61}$$

   b. On résout cette inéquation.

   $$\mathrm{e}^{-0{,}4t} \leqslant \frac{11}{61} \iff -0{,}4t \leqslant \ln\left(\frac{11}{61}\right) \iff t \geqslant -\frac{\ln\left(\frac{11}{61}\right)}{0{,}4}$$

   $-\dfrac{\ln\left(\frac{11}{61}\right)}{0{,}4} \approx 4{,}282$ donc 4 minutes et $\dfrac{282}{1000}$ de minute.

   $\dfrac{282}{1000} = \dfrac{16{,}92}{60}$ ce qui donne 16,92 secondes.

Donc la température devient inférieure à 50°C au bout de 4 minutes et 17 secondes.

3. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(t) = -305\,\text{e}^{-0,4t} + 28t$.

$F'(t) = -305 \times (-0,4)\,\text{e}^{-0,4t} + 28 = 122\,\text{e}^{-0,4t} + 28 = f(t)$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

4. La température moyenne du matériau durant les 6 premières minutes qui suivent la sortie du four est :

$$M = \frac{1}{6-0}\int_0^6 f(t)\,\text{d}t = \frac{1}{6}\left[F(t)\right]_0^6 = \frac{1}{6}\left[F(6) - F(0)\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\left(-305\,\text{e}^{-0,4\times 6} + 28 \times 6\right) - \left(-305\,\text{e}^{-0,4\times 0} + 28 \times 0\right)\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[-305\,\text{e}^{-2,4} + 168 + 305\right] = \frac{1}{6}\left[-305\,\text{e}^{-2,4} + 473\right] \approx 74,2$$

Exercice 2 — 10 points

Partie A - Probabilités conditionnelles

Le tableau ci-dessous décrit le stock de paires de lunettes d'un opticien.

	Verres Polarisés **L**	Verres Photochromiques H	Autre type de verre **A**	Total
Modèle CLASSIQUE **C**	17,5 %	10,5 %	42 %	$\boxed{70\ \%}$
Modèle SPORT **S**	16,5 %	10,5 %	$\boxed{3\ \%}$	30 %
Total	34 %	$\boxed{21\ \%}$	45 %	100 %

Le tableau ci-dessus permet ainsi de voir notamment que :

70 % des paires de lunettes sont des modèles CLASSIQUE.

3 % des paires de lunettes sont des modèles SPORT équipées d'un autre type de verre.

21 % des paires de lunettes sont équipées de verres photochromiques.

On prélève au hasard une paire de lunettes. On considère les évènements suivants :

- C : « la paire de lunettes est un modèle CLASSIQUE »,
- S : « la paire de lunettes est un modèle SPORT »,
- L : « la paire de lunettes est équipée de verres polarisés »,

- H : « la paire de lunettes est équipée de verres photochromiques »,
- A : « la paire de lunettes est équipée d'un autre type de verre ».

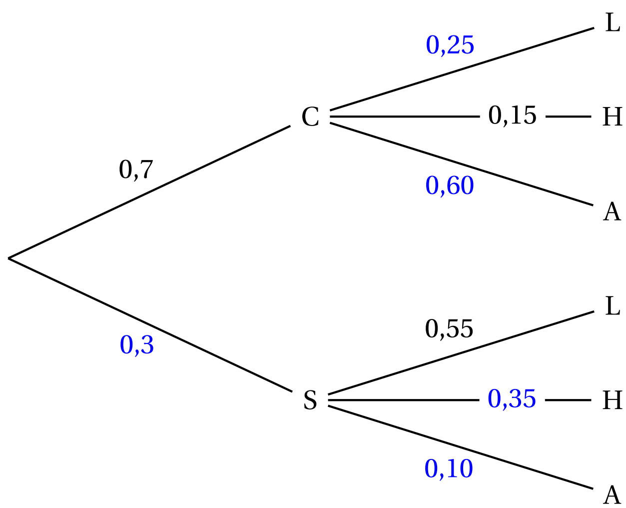
1. D'après le tableau, le stock de verres polarisés de modèle sport est de 16,5 % donc $P(L \cap S) = 0{,}165$.

2. L'événement $L \cup S$ correspond à « Verres Polarisés ou Modèle SPORT » pour un total de $17{,}5 + 16{,}5 + 10{,}5 + 3$ soit 47,5 %. Donc $P(L \cup S) = 0{,}475$.

3. Il y a 30 % de « Modèle SPORT » et parmi eux 16,5 % de « Verres Polarisés » ;
donc $P_S(L) = \dfrac{16{,}5}{30} = 0{,}55$.

4. $P_S(L) = 0{,}55$ et $P(L) = 0{,}34$; donc $P_S(L) \neq P(L)$ donc les événements L et S ne sont pas indépendants.

5. On complète l'arbre suivant qui représente la situation décrite par le tableau.



Explications

$P_C(H) = \dfrac{10{,}5}{70} = 0{,}15$ (valeur donnée dans l'arbre)

De même : $P_C(L) = \dfrac{17{,}5}{70} = 0{,}25$ et $P_C(A) = \dfrac{42}{70} = 0{,}60$. Etc.

Partie B - Loi binomiale

Parmi les clients de l'opticien, la proportion de retraités est égale à 62 %.

Un jour donné, l'opticien accueille 90 clients. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de retraités parmi les 90 clients accueillis ce jour.

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 90$ et $p = 0{,}62$.

Son espérance mathématique est $E(X) = np = 90 \times 0{,}62 = 55{,}8$.

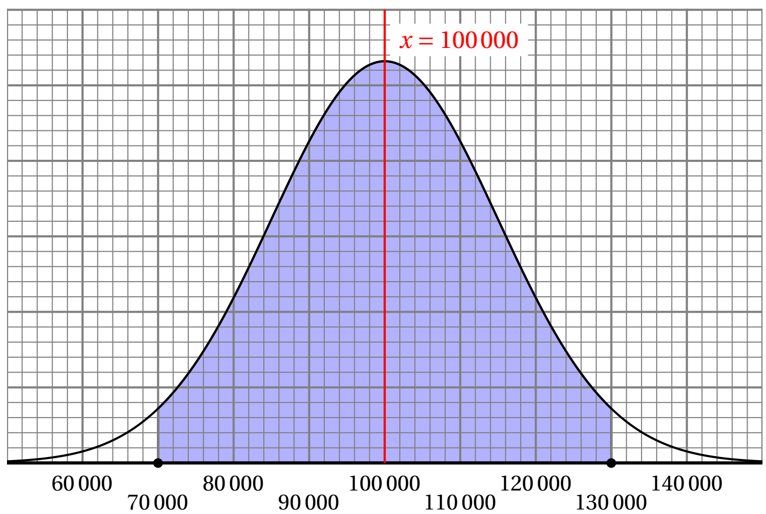
2. $P(X = 55) = \dbinom{90}{55} \times 0{,}62^{55} \times (1 - 0{,}62)^{90-55} \approx 0{,}085$.

3. La probabilité qu'au moins 50 % des clients accueillis ce jour soient des retraités est : $P(X \geqslant 45) \approx 0{,}992$.

Partie C - Loi normale

Le chiffre d'affaires d'un opticien en 2023 a été égal à 80 000 euros. Il espère que son chiffre d'affaires en 2024 sera supérieur.

Son chiffre d'affaires, en euros, estimé pour 2024, est donné par une variable aléatoire Z qui suit une loi normale dont la courbe de densité est représentée ci-dessous.



1. On note μ l'espérance de la variable aléatoire Z.

On sait que la courbe de Gauss est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$; d'après le graphique, on trouve $\mu = 100\,000$.

2. On note σ l'écart-type de la variable aléatoire Z.

On sait que la zone grisée correspond à une probabilité égale à 0,95, donc $P(70\,000 \leqslant X \leqslant 130\,000) = 0{,}95$.

On sait aussi que si la variable aléatoire X suit une loi normale, on a $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$.

Donc $\mu - 2\sigma \approx 70\,000$, autrement dit $100\,000 - 70\,000 \approx 2\sigma$, soit $30\,000 \approx 2\sigma$, et donc $\sigma \approx 15\,000$.

3. La probabilité que le chiffre d'affaires en 2024 soit supérieur à celui de 2023 est $P(X \geqslant 80\,000) \approx 0{,}909$.

4. Si entre 2023 et 2024, son chiffre d'affaires augmente de 30 %, l'opticien embauchera un nouvel employé.

$$80\,000 + \frac{30}{100} \times 80\,000 = 104\,000$$

La probabilité que l'opticien embauche un nouvel employé est $P(X \geqslant 104\,000) \approx 0{,}395$

Partie D - Test d'hypothèse

Afin de développer le commerce, une commune rurale décide de construire des parkings pour les commerçants dont la proportion de clients venant en voiture est comprise entre 50 % et 60 %. Lorsque la proportion est inférieure, le parking n'est pas nécessaire. Lorsque la proportion est supérieure, le commerçant devra obligatoirement s'installer en périphérie de la commune.

Un opticien affirme à la mairie de cette commune que 55 % de ses clients viennent en voiture.

Afin de contrôler cette affirmation, la mairie met en place un test bilatéral au seuil de 5 % sur un échantillon aléatoire de 130 clients.

On note F la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 130 clients, associe la proportion de ceux qui viennent en voiture. On suppose que F suit une loi normale d'espérance p inconnue et d'écart-type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{130}}$.

L'hypothèse nulle est H_0 : « $p = 0,55$ » et l'hypothèse alternative est H_1 : « $p \neq 0,55$ ».

1. Sous l'hypothèse nulle, $p = 0,55$ donc la variable aléatoire F suit une loi normale d'espérance $p = 0,55$ et d'écart-type $s = \sqrt{\dfrac{0,55(1-0,45)}{130}} \approx 0,044$.
2. On sait que $P(p-2s < F < p+2s) \approx 0,95$,
donc le réel positif h tel que $P(0,55-h < F < 0,55+h) = 0,95$ est $h = 2s = 0,088$.
3. $0,55-0,088 = 0,462$ et $0,55+0,088 = 0,638$; donc $P\left(F \in [0,462\,;\,0,638]\right) = 0,95$.

   On peut énoncer la règle de décision :

   - si, parmi les 130 clients, la moyenne des clients utilisant leur voiture n'appartient pas à l'intervalle $[0,462\,;\,0,638]$, alors on rejette l'hypothèse nulle, au risque de 5 % ;
   - sinon, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle.

   Sur un échantillon de 130 clients, la mairie a noté que 88 étaient venus en voiture.

   $\dfrac{88}{130} \approx 0,677 \not\in [0,462\,;\,0,638]$ donc on peut rejeter l'hypothèse nulle au risque de 5 %, donc on peut mettre en cause l'affirmation de l'opticien selon laquelle 55 % de ses clients viennent en voiture.