Corrigé du BTS Métropole mai 2021
Services informatiques aux organisations

Épreuve obligatoire

Exercice 1 : un problème de routage **5 points**

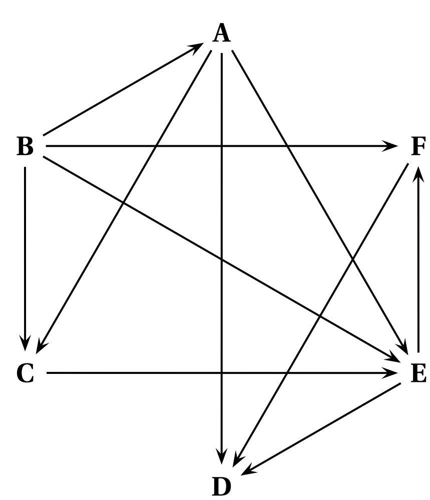
Partie A

On considère un réseau de commutation de paquets constitués de 6 routeurs A, B, C, D, E et F. Chaque paquet reçu par l'un des routeurs doit être acheminé vers un autre routeur, jusqu'à atteindre sa destination finale. Dans le tableau ci-dessous, on a résumé les règles de routage d'un routeur à un autre routeur.

Peut transmettre à	A	B	C	D	E	F
A			■	■	■	
B	■		■		■	■
C					■	
D						
E				■		■
F				■		

On considère le graphe simple orienté **G** constitué des sommets A, B, C, D, E et F. Les sommets représentent les routeurs. Si un sommet X peut transmettre un paquet vers un sommet Y alors on a l'arc : X $\longrightarrow$ Y.

On peut représenter ce graphe :



1. **a.** On complète le tableau des successeurs et des prédécesseurs du graphe **G** :

Sommets	Prédécesseurs	Successeurs
A	B	C - D - E
B	–	A - C - E - F
C	A - B	E
D	A - E - F	–
E	A - B - C	D - F
F	B - E	D

b. La matrice d'adjacence M du graphe **G**, les sommets étant rangés par ordre alphabétique est :

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. **a.** La calculatrice donne :

$$M^3 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b. Le nombre de chemins de longueur 3 allant du sommet B (sommet n° 2) au sommet D (sommet n° 4) est le nombre de la matrice M^3 situé à l'intersection de la 2^{e} ligne et de la 4^{e} colonne; il s'agit du nombre 3 donc il y a 3 chemins de longueur 3 allant du sommet B au sommet D.

Ce sont : B → A → E → D, B → C → E → D et B → E → F → D.

3. **a.** La matrice de fermeture transitive de ce graphe est une matrice carrée d'ordre 6; on met un 1 à l'intersection de la ligne correspondant au sommet X et de la colonne correspondant au sommet Y s'il existe au moins un chemin allant du sommet X au sommet Y. Sinon on met un 0.

Le graphe **G** contient 6 sommets donc la matrice de fermeture transitive est $\widehat{M} = M \vee M^{[2]} \vee M^{[3]} \vee M^{[4]} \vee M^{[5]} \vee M^{[6]}$ où $\vee$ désigne la somme booléenne, et $M^{[n]}$ la matrice booléenne de M^n, c'est-à-dire la matrice M^n dans laquelle on a remplacé chaque nombre non nul par un 1.

Pour obtenir $\widehat{M}$, il suffit de calculer $N = M + M^2 + M^3 + M^4 + M^5 + M^6$ et de remplacer dans la matrice N chaque nombre non nul par le nombre 1.

La calculatrice donne :

$$N = M + M^2 + M^3 + M^4 + M^5 + M^6 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} & \text{E} & \text{F} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{A}\\ \text{B}\\ \text{C}\\ \text{D}\\ \text{E}\\ \text{F} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 2 & 10 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On obtient donc :

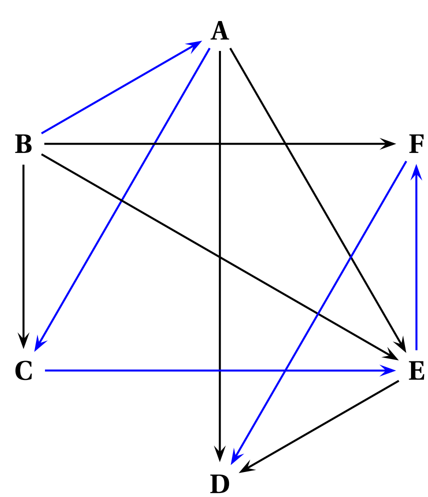
$$\widehat{M} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} & \text{E} & \text{F} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{A}\\ \text{B}\\ \text{C}\\ \text{D}\\ \text{E}\\ \text{F} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b. La 3^e^ ligne correspond au sommet C et la 6^e^ colonne au sommet F ; le nombre 1 à l'intersection de la troisième ligne et la sixième colonne de $\widehat{M}$ signifie qu'il y a au moins un chemin allant de C vers F.

En regardant la matrice N, on peut même dire qu'il n'y en a qu'un seul :
C $\longrightarrow$ E $\longrightarrow$ F.

4. Un chemin hamiltonien est un chemin qui passe une fois et une seule par tous les sommets.

Le chemin B $\longrightarrow$ A $\longrightarrow$ C $\longrightarrow$ E $\longrightarrow$ F $\longrightarrow$ D est hamiltonien.



Remarque : comme le sommet B n'a pas de prédécesseur, un chemin hamiltonien doit forcément commencer par B, et comme le sommet D n'a pas de successeur, il doit forcément se terminer par D.

Partie B

Dans un parc informatique, chaque machine connectée à un réseau peut être identifiée à l'aide d'une adresse IPv4.

1. **a.** Dans la base 2, un octet est constitué de 8 chiffres.

   Le plus grand entier noté en base 10 qu'on peut écrire sous la forme d'un octet est le nombre décimal correspondant à $\overline{11111111}^{2}$ soit
   $1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7=1+2+4+8+16+32+64+128=255$.

   b. Un octet représente un nombre entier entre 0 et 255, soit 256 nombres différents.

   Une adresse IPv4 étant constituée de 4 octets notés en base 10 et séparés par un point, le nombre maximal d'adresses IPv4 qui peuvent être attribuées est
   $256^4=4\,294\,967\,296$.

Le routeur C de la partie A gère les connexions réseaux d'un parc informatique de 8 machines étiquetées de 1 à 8.

Le DHCP de ce routeur est paramétré de telle façon qu'il attribue une plage de 49 adresses IPv4 allant de 192.168.1.2 jusqu'à 192.168.1.50.

Les 8 machines sont identifiées grâce aux adresses IPv4 suivantes :

Etiquette de la machine	Adresse IPv4 de la machine
1	192.168.1.2
2	192.168.1.4
3	192.168.1.12
4	192.168.1.49
5	192.168.1.48
6	192.168.1.50
7	192.168.1.5
8	192.168.1.6

2. Le premier octet commun s'écrit en décimal 192 ; on écrit 192 en binaire puis en hexadécimal.

   $192=128+64=1\times2^7+1\times2^6+0\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+0\times2^0=\overline{11000000}^{2}$

   $192=12\times16+0\times16^0=\overline{\texttt{C0}}^{16}$

Exercice 2 — 5 points

Le spam, courriel indésirable ou pourriel, est une communication électronique non sollicitée, en premier lieu via le courrier électronique. Il s'agit en général d'envois en grande quantité effectués à des fins publicitaires.

Un étudiant en BTS SIO a développé un logiciel anti spam. Le filtre mis en place par l'étudiant se base sur les trois variables booléennes suivantes :

- a l'objet du message contient au moins un terme douteux (gratuit, offre, promotion, gagner ...), $\overline{a}$ l'objet du message ne contient aucun terme douteux;
- b le corps du message contient des images ou des hyperliens, $\overline{b}$ le corps du message ne contient ni images, ni hyperliens;
- c les messages de l'expéditeur sont rarement lus, $\overline{c}$ les messages de l'expéditeur sont lus fréquemment.

Avec ce logiciel, un courriel est considéré comme indésirable si :

- l'objet du message contient au moins un terme douteux avec un corps du message contenant des images ou des hyperliens;

  ou
- l'objet du message ne contient aucun terme douteux et les messages de l'expéditeur sont rarement lus;

  ou
- les messages de l'expéditeur sont rarement lus et le corps du message ne contient ni images, ni d'hyperliens;

1. Le « et » se traduit en produit et le « ou » se traduit en somme.

Donc :

- l'objet du message contient au moins un terme douteux (appelé a) avec un corps du message contenant des images ou des hyperliens (appelé b), se traduit en $a.b$,
- ou, se traduit par +,
- l'objet du message ne contient aucun terme douteux (appelé $\overline{a}$) et les messages de l'expéditeur sont rarement lus (appelé c), se traduit en $\overline{a}.c$;
- ou, se traduit par +,
- les messages de l'expéditeur sont rarement lus (appelé c) et le corps du message ne contient ni images, ni d'hyperliens (appelé $\overline{b}$), se traduit en $\overline{b}.c$.

Donc $E = a.b + c.\overline{a} + \overline{b}.c$.

2. **a.** On présente E dans une table de Karnaugh.

$a.b$

a \ bc	00	01	11	10
0				
1			1	1

$\overline{a}.c$

a \ bc	00	01	11	10
0		1	1	
1				

$\overline{b}.c$

a \ bc	00	01	11	10
0		1		
1		1		

$E = a.b + \overline{a}.c + \overline{b}.c$

a \ bc	00	01	11	10
0		1	1	
1		1	1	1

b. Un courriel, ayant comme objet « promotion : une réduction de 50 % … » (appelé a), et dont les messages de l'expéditeur sont lus fréquemment (appelé $\overline{c}$), est donc codé $a.\overline{c}$. On le représente dans une table de Karnaugh :

$a.\overline{c}$

a \ bc	00	01	11	10
0				
1	1			1

En comparant avec la table de E, on peut ne pas considérer ce courriel comme indésirable.

c. En utilisant la table de Karnaugh, on déduit l'expression simplifiée de E.

$E = a.b + \overline{a}.c + \overline{b}.c$

a \ bc	00	01	11	10
0		1	1	
1		1	1	1

$a.b$

c

Donc $E = c + a.b$.

3. La règle E pour considérer un courriel comme indésirable est :

- Les messages de l'expéditeur sont rarement lus (c),

  ou ($+$)

- l'objet du message contient au moins un terme douteux (a) et ($\times$) le corps du message contient des images ou des hyperliens (b).

4. En partant de la table de Karnaugh de E, on écrit celle de $\overline{E}$ par complément :

a \ bc	00	01	11	10
0	1			1
1	1			

$\overline{a}.\overline{c}$

$\overline{b}.\overline{c}$

Donc $\overline{E} = \overline{b}.\overline{c} + \overline{a}.\overline{c}$.

En utilisant les formules $\overline{(x+y)} = \overline{x}.\overline{y}$ et $\overline{(x.y)} = \overline{x} + \overline{y}$, on retrouve ce résultat :

$\overline{E} = \overline{c + a.b} = \overline{c}.\overline{(a.b)} = \overline{c}.\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = \overline{c}.\overline{a} + \overline{c}.\overline{b}$

Exercice 3 : Codage de Hill **5 points**

Dans le tableau suivant, on associe à chaque lettre de l'alphabet, en majuscule, son rang dans l'alphabet en commençant par 0.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Partie A

Dans cette partie, on considère la clé de chiffrement $W = \begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&3\\2&4&2\end{pmatrix}$.

Cette clé permet de chiffrer le mot « BUR » en « XMR ».

1. Le message « JUA » correspond aux nombres 9 – 20 – 0, donc à la matrice $M = \begin{pmatrix}9&20&0\end{pmatrix}$.
   $M \times W = \begin{pmatrix}49&38&69\end{pmatrix}$ ce qui donne pour restes modulo 26 : $\begin{pmatrix}23&12&17\end{pmatrix}$.
   Cette matrice correspond à « XMR » donc le message chiffré est « XMR ».
2. Les deux séquences « BUR » et « JUA » correspondent au même message chiffré « XMR » ; la clé de chiffrement n'est donc pas bonne.

Partie B

Dans cette partie, on considère la clé de chiffrement $W = \begin{pmatrix}11&n&14\\7&9&21\\17&0&3\end{pmatrix}$, où n est un entier naturel compris entre 15 et 25.

On sait que cette clé permet de chiffrer le mot « GEL » en « VMT ».

1. Le mot « GEL » correspond aux nombres 6 – 4 – 11 donc à la matrice $M = \begin{pmatrix}6&4&11\end{pmatrix}$.
   $M \times W = \begin{pmatrix}281&6n+36&201\end{pmatrix}$
   Le mot « VMT » correspond à 21 – 12 – 19 soit à la matrice $\begin{pmatrix}21&12&19\end{pmatrix}$.
   - $281 = 10 \times 26 + 21$ donc 281 correspond au nombre 21 donc à la lettre V ;
   - $201 = 7 \times 26 + 19$ donc 201 correspond au nombre 19 donc à la lettre T ;

   Pour que « GEL » se code en « VMT », il faut donc que $6n+36$ corresponde à la lettre M, donc corresponde au nombre 12 ; il faut donc que $6n+36 \equiv 12 \pmod{26}$.
2. On cherche tous les restes de la division de $6n+36$ dans la division par 26, pour n variant entre 15 et 25 :

n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$6n+36$	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180	186
restes	22	2	8	14	20	0	6	12	18	24	4

Pour $n = 22$, on a : $6n+36 \equiv 12 \pmod{26}$, donc la valeur de n cherchée est 22.