∽ Corrigé du BTS Métropole – 16 mai 2024 ∾

Services informatiques aux organisations

Épreuve de mathématiques approfondies

Exercice 1 — 10 points

Un magasin vend des téléphones portables et souhaite proposer à ses acheteurs de souscrire un contrat d'assurance.

Partie A : Étude de marché

Avant la date de de proposition de son assurance, le magasin a commandé une étude permettant d'observer les habitudes d'un échantillon représentatif d'acheteurs. Elle a obtenu les informations suivantes :

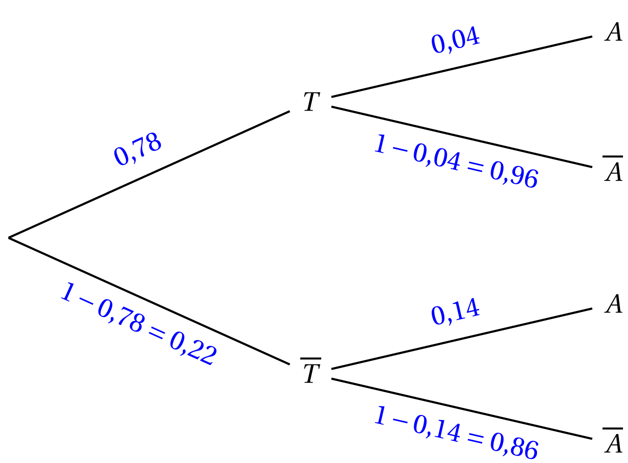
- 78 % des acheteurs de l'échantillon ont moins de 30 ans ;
- parmi les acheteurs de moins de 30 ans, 4 % souscrivent un contrat d'assurance ;
- 14 % des acheteurs qui ont 30 ans ou plus souscrivent un contrat d'assurance.

On choisit un acheteur au hasard dans cet échantillon.

On considère les évènements suivants :

- T : « l'acheteur a moins de 30 ans » ;
- A : « l'acheteur souscrit un contrat d'assurance ».

1. On complète l'arbre pondéré suivant :



2. La probabilité que l'acheteur ait moins de 30 ans et souscrive un contrat d'assurance est : $P(T \cap A) = P(T) \times P_T(A) = 0,78 \times 0,04 = 0,0312$.

3. La probabilité que l'acheteur souscrive un contrat d'assurance est $P(A)$.

D'après la formule des probabilités totales :

$P(A) = P(T \cap A) + P\left(\overline{T} \cap A\right) = 0{,}031\,2 + 0{,}22 \times 0{,}14 = 0{,}062$.

4. Sachant qu'un acheteur a souscrit un contrat d'assurance, la probabilité qu'il ait moins de 30 ans est : $P_A(T) = \dfrac{P(T \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}031\,2}{0{,}062} \approx 0{,}503$.

Partie B : Étude après commercialisation

Pour la première phase de commercialisation de son contrat d'assurance, le magasin a vendu 100 téléphones. On considère que cette phase de commercialisation revient à effectuer un prélèvement de 100 acheteurs avec remise parmi un très grand nombre d'acheteurs. On suppose que l'échantillon de la partie A était représentatif, c'est-à-dire que la probabilité qu'un acheteur de téléphone prélevé au hasard souscrive un contrat d'assurance est égale à 0,062.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 100 acheteurs, associe le nombre d'acheteurs qui ont souscrit un contrat d'assurance.

1. **a.** Pour un acheteur, il n'y a que deux possibilités : il a souscrit une assurance, avec une probabilité de $p = 0{,}062$, ou pas.

De plus, on considère qu'extraire un échantillon de 100 acheteurs revient à effectuer un prélèvement de 100 acheteurs avec remise parmi un très grand nombre d'acheteurs.

Donc la variable aléatoire X qui, à chaque lot de 100 acheteurs, associe le nombre d'acheteurs qui ont souscrit un contrat d'assurance suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}062$.

b. La probabilité qu'exactement 7 acheteurs souscrivent un contrat d'assurance est :

$P(X = 7) = \dbinom{100}{7} \times 0{,}062^7 \times (1 - 0{,}062)^{100-7} \approx 0{,}147$.

c. L'espérance de la variable aléatoire X est $E(X) = np = 100 \times 0{,}062 = 6{,}2$.

d. Pour chaque téléphone vendu, le magasin reçoit une prime de 7,50 euros si l'acheteur souscrit un contrat d'assurance.

En moyenne, le montant total des primes que percevra le magasin est $7{,}50 \times 6{,}2$ soit 46,50 €.

2. Pour approfondir son étude, la société décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 6{,}2$.

On note Y la variable aléatoire suivant cette loi de Poisson.

a. Une loi binomiale de paramètres n et p peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = n \times p$.

$n \times p = 6{,}2$, ce qui justifie le choix de $\lambda = 6{,}2$.

b. À la calculatrice, on trouve : $P(Y \geqslant 5) \approx 0{,}741$.

Il y a donc 74,1 % de chances que sur un échantillon de 100 acheteurs, il y en ait au moins 5 qui souscrivent une assurance.

c. La probabilité qu'au moins un acheteur souscrive un contrat d'assurance est :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \text{e}^{-6,2}\frac{6,2^0}{0\,!} = 1 - \text{e}^{-6,2} \approx 0,998.$$

Exercice 2 — 10 points

Une société conçoit et commercialise un jeu vidéo d'aventure.

Partie A : Gain de niveau et points d'expérience - étude statistique

Ce jeu est constitué de plusieurs niveaux. Un joueur débute au niveau 1 et peut passer au niveau supérieur en gagnant des points d'expérience. Pour tout entier naturel n, non nul, on note x_n le nombre de points d'expérience nécessaires (en milliers) pour passer du niveau n au niveau $n+1$.

Le tableau ci-dessous indique, pour quelques niveaux, le nombre de points d'expérience nécessaires (en milliers) pour passer au niveau suivant :

Niveau n	2	4	6	8	10
Nombre de points d'expérience nécessaires (en milliers) pour passer du niveau n au niveau $n+1$	220	256	283	304	321

1. À la calculatrice, on trouve que le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique $(n\,;\,x_n)$ vaut environ 0,99.
2. À l'aide d'une calculatrice, on trouve pour équation de la droite de régression de x_n en n, $x_n = 12,5n + 201,8$.
3. Le nombre de points d'expérience nécessaires pour passer du niveau 20 au niveau 21 est $x_{20} = 12,5 \times 20 + 201,8$, soit 452 en arrondissant à l'unité.

Partie B : Gain de niveau et points d'expérience - étude de fonction

La société n'est pas satisfaite de la valeur de r trouvée en partie A, qu'elle estime trop éloignée de 1. Elle choisit une autre méthode.

Pour cela, elle considère la fonction f définie sur $[1\,;\,100]$ par $f(x) = 100\ln(2x+5)$.

On admet que pour tout entier naturel n, non nul, $f(n)$ modélise le nombre de points d'expérience nécessaires (en milliers) pour passer du niveau n au niveau $n+1$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,100]$, $f'(x) = 100 \times \dfrac{2}{2x+5} = \dfrac{200}{2x+5}$.
2. **a.** Sur $[1\,;\,100]$, $2x+5 > 0$ donc $f'(x) > 0$ et donc la fonction f est strictement croissante.

   b. $f(1) = 100\ln(2\times 1+5) = 100\ln(7) \approx 195$ et
   $f(100) = 100\ln(2\times 100+5) = 100\ln(205) \approx 532$.

   On dresse le tableau de variation de la fonction f sur $[1\,;\,100]$.

x	1		100
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	195	$\nearrow$	532

3. **a.** On résout sur $[1\,;\,100]$, l'équation $f(x) = 500$.

$f(x) = 500 \iff 100\ln(2x+5) = 500 \iff \ln(2x+5) = 5 \iff 2x+5 = \mathrm{e}^5$
$\iff x = \dfrac{\mathrm{e}^5 - 5}{2}$ donc $x \approx 72$.

b. On en déduit que 72 est le premier niveau à partir duquel au moins 500 points d'expérience sont nécessaires pour passer au niveau suivant.

Partie C : Étude des gains d'Ether

La monnaie du jeu s'appelle l'Ether (symbolisé par E). Un joueur débute avec une somme de 50 000 E. Les règles sont telles que chaque nouvelle heure supplémentaire jouée augmente la somme détenue par le joueur de 2 %.

Pour tout entier naturel, u_n modélise la somme détenue par le joueur après avoir joué n heures. Ainsi on a $u_0 = 50\,000$.

1. **a.** $u_1 = u_0 + u_0 \times \dfrac{2}{100} = 50\,000 + 50\,000 \times \dfrac{2}{100} = 51\,000$

b. $u_2 = u_1 + u_1 \times \dfrac{2}{100} = 51\,000 + 51\,000 \times \dfrac{2}{100} = 52\,020$

Donc au bout de 2 heures, le joueur possède 52 020 E.

2. **a.** Ajouter 2 %, c'est multiplier par $1 + \dfrac{2}{100}$ soit 1,02, donc pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = u_n \times 1{,}02$.

b. On en déduit que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1{,}02$ et de premier terme $u_0 = 50\,000$.

3. **a.** La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1{,}02$ et de premier terme $u_0 = 50\,000$ donc pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = u_0 \times q^n = 50\,000 \times 1{,}02^n$.

b. La somme détenue après avoir joué 7 heures est de $50\,000 \times 1{,}02^7$ soit 57 434 E en arrondissant à l'unité.