Corrigé du BTS Polynésie – 16 mai 2024

Services informatiques aux organisations

Épreuve de mathématiques approfondies

Exercice 1 **10 points**

Une entreprise fabrique entre 1 000 et 15 000 composants pour téléphones portables par jour. On admet que si l'entreprise fabrique x milliers de composants par jour le bénéfice de l'entreprise en centaines d'euros est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,15]$ par : $f(x) = -x\ln(x) + 2x$.

Partie A

1. **a.** Un logiciel de calcul formel donne l'expression suivante pour la dérivée de la fonction $x \longmapsto x\ln(x)$:

1	$x\ln(x)$
	Dérivée : $\ln(x)+1$

Pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,15]$,
$f'(x) = -\left(\ln(x)+1\right) + 2 = -\ln(x) - 1 + 2 = -\ln(x) + 1$.

b. $-\ln(x) + 1 > 0 \iff 1 > \ln(x) \iff \mathrm{e} > x$

On établit le tableau de signes de $f'(x)$:

x	1		e		15
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

c. $f(1) = -1 \times \ln(1) + 2 \times 1 = 2$, $f(\mathrm{e}) = -\mathrm{e} \times \ln(\mathrm{e}) + 2 \times \mathrm{e} = \mathrm{e} \approx 2{,}72$ et
$f(15) = -15 \times \ln(15) + 2 \times 15 \approx -10{,}62$

On déduit le tableau de variation de la fonction f sur $[1\,;\,15]$.

x	1		e		15
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$\approx 2{,}72$	$\searrow$	$\approx -10{,}62$

d. Le maximum de f sur l'intervalle $[1\,;\,15]$ est $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e} \approx 2{,}72$.

2. **a.** D'après le tableau de variation de f :
   - Sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$, la fonction f est croissante et $f(1) = 2 > 0$; donc $f(x) > 0$ ce qui entraine que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
   - Sur l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\,15]$, la fonction f est décroissante et passe d'une valeur positive à une valeur négative ; donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique.

   On peut donc dire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1\,;\,15]$; on l'appelle a.

   D'après la calculatrice, $a \approx 7{,}39$.

   Remarque du correcteur

   On peut trouver facilement la valeur exacte de a ; sur l'intervalle $[1\,;\,15]$:
   $f(x) = 0 \iff -x\ln(x)+2x = 0 \iff x\left(-\ln(x)+2\right) = 0 \iff -\ln(x)+2 = 0$
   $\iff 2 = \ln(x) \iff x = \mathrm{e}^2$

   b. On déduit le signe de f sur l'intervalle $[1\,;\,15]$.

x	1		a		15
$f(x)$		$+$	0	$-$	

3. **a.** Soit F la fonction définie sur $[1\,;\,15]$, par $F(x) = x^2\left(\dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{2}\ln(x)\right)$.

   $F'(x) = 2x \times \left(\dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{2}\ln(x)\right) + x^2 \times \left(0 - \dfrac{1}{2x}\right) = \dfrac{5}{2}x - x\ln(x) - \dfrac{1}{2}x = -x\ln(x) + 2x = f(x)$

   Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[1\,;\,15]$.

   b. $\displaystyle\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x = F(6) - F(2) = \left(6^2\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\ln(6)\right)\right) - \left(2^2\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)\right)\right)$

   $= \left(45 - 18\ln(6)\right) - \left(5 - 2\ln(2)\right) = 40 - 18\ln(6) + 2\ln(2) \approx 9{,}13$

Partie B

1. Le bénéfice maximum est égal à $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$, soit environ 2,72 centaines d'euros, autrement dit 272 €.

   Ce maximum est réalisé pour $x = \mathrm{e}$ milliers de composants soit 2 720.
2. On considère que la production journalière de l'entreprise est comprise entre 2 000 et 6 000 composants.

   a. La production est entre 2 et 6 milliers de composants.

   $6 < a$ donc l'intervalle $[2\,;\,6]$ est contenu dans l'intervalle $[1\,;\,a]$, donc f est positive sur l'intervalle $[2\,;\,6]$. L'entreprise réalise donc un bénéfice positif.

   b. Pour une telle production, on admet que le bénéfice moyen de l'entreprise, en centaines d'euros, est donné par : $\mu = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x$.

D'après la partie A, $\mu \approx \dfrac{1}{4} \times 9{,}13$ donc $\mu \approx 2{,}2825$.

Le bénéficie moyen est donc d'environ 228 €.

Exercice 2 **10 points**

Partie A

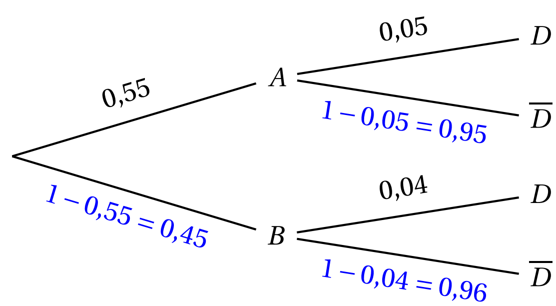
Une entreprise possède deux chaînes de fabrication, notées a et b, qui produisent des composants électroniques. La chaine a produit 55 % des composants. On estime que 5 % des pièces produites par la chaîne a sont défectueuses et 4 % des pièces produites par la chaîne b sont défectueuses.

On choisit au hasard un composant électronique parmi ceux produits par cette entreprise.

On considère les évènements suivants :

- A : « le composant est produit par la chaine a »
- B : « le composant est produit par la chaîne b »
- D : « le composant présente un défaut »;

1. **a.** On modélise cette situation par un arbre pondéré.



   b.
   - $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0{,}55 \times 0{,}05 = 0{,}0275$
   - $P(B \cap D) = P(B) \times P_B(D) = 0{,}45 \times 0{,}04 = 0{,}018$
   - D'après la formule des probabilités totales :
     $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0{,}0275 + 0{,}018 = 0{,}0455$

   c. On a prélevé un composant défectueux, la probabilité qu'il provienne de la chaîne a est : $P_A(D) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}0275}{0{,}0455} \approx 0{,}6044$

2. On constitue un lot de composants provenant des deux chaînes de fabrication en prélevant 100 composants. On considère que le nombre de composants produits par les deux chaines de fabrication est suffisamment important pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise. On considère que la probabilité qu'une pièce soit défectueuse est $p = 0{,}0455$. On note X la variable aléatoire, qui a chaque lot de 100 composants, associe le nombre de pièces défectueuses de ce lot.

   a. Un composant peut être défectueux, avec une probabilité $p = 0{,}0455$, ou pas; il y a donc deux issues possibles?

On suppose que le prélèvement de 100 composants est assimilé à un tirage avec remise. Donc la variable aléatoire X, qui a chaque lot de 100 composants, associe le nombre de pièces défectueuses de ce lot suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}0455$.

b. À la calculatrice, on trouve :

- $P(X = 0) \approx 0{,}0095$
- $P(X \leqslant 0) \approx 0{,}9941$

c. La probabilité qu'il y ait entre 1 et 10 pièces défectueuses dans le lot est :
$P(1 \leqslant X \leqslant 10) = P(X \leqslant 10) - P(X = 0) = 0{,}9941 - 0{,}0095 = 0{,}9846$

d. L'espérance de la variable aléatoire X est : $E(X) = np = 100 \times 0{,}0455 = 4{,}55$

Sur un échantillon de 100 composants, il y aura, en moyenne, 4,55 pièces défectueuses.

Partie B

Une société commercialise des liseuses utilisant les composants électroniques étudiés dans la partie A. Le tableau ci-dessous, où x_i désigne le rang de l'année mesuré à partir de l'année 2015, donne le nombre y_i de liseuses de cette marque vendues annuellement depuis 2015.

Année	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Nombre y_i de liseuses vendues	1 245	1 320	1 421	1 480	1 530	1 680	1 710

1. a. D'après la calculatrice, le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$, arrondi au centième, est 0,99.

b. Le coefficient de corrélation linéaire est très proche de 1 donc on peut envisager un ajustement affine.

2. À l'aide d'une calculatrice, on trouve pour équation de la droite de régression de y en x, sous la forme $y = ax + b$, en arrondissant les coefficients a et b au dixième, est : $y = 78{,}7x + 1249$.

3. a. L'année 2023 correspond à $x = 8$.
À l'aide de l'équation de la droite de régression trouvée précédemment, le nombre de liseuses vendues en 2023 peut être estimé à $78{,}7 \times 8 + 1249$ soit 1 877 en arrondissant à l'unité.

b. Le rang de l'année à partir duquel le nombre de liseuses vendues deviendrait supérieur à 3 000 est le nombre x tel que $78{,}7x + 1249 > 3000$.

On résout cette inéquation.

$78{,}7x + 1249 > 3000 \iff 78{,}7x > 3000 - 1249 \iff 78{,}7x > 1751 \iff x > \dfrac{1751}{78{,}7}$

$\dfrac{1751}{78{,}7} \approx 22{,}2$ donc le rang cherché est 23.