∽ Corrigé du BTS Polynésie – Mathématiques approfondies ∾ Services informatiques aux organisations – mai 2021

Exercice 1 **10 points**

Dans un groupe d'assurances, on s'intéresse aux sinistres susceptibles de survenir, une année donnée, aux véhicules de la flotte d'une importante entreprise de livraison de colis.

Partie A - Étude du nombre de sinistres dans une équipe de 15 conducteurs

On choisit au hasard 15 conducteurs de l'entreprise. Le nombre de conducteurs est suffisamment important pour que ce choix soit assimilé à un tirage avec remise. On note E l'évènement : « un conducteur choisi au hasard dans l'ensemble des conducteurs de l'entreprise n'a pas de sinistre pendant l'année considérée ». On suppose que la probabilité de l'événement E est égale à $0,6$. On considère la variable aléatoire X qui, parmi les 15 conducteurs choisis, comptabilise le nombre de conducteurs n'ayant pas de sinistre pendant l'année considérée.

1. L'expérience consiste en la répétition de 15 épreuves identiques qui n'ont que deux issues ; la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,6$.
2. La probabilité que, parmi les 15 conducteurs choisis, 10 conducteurs exactement n'aient pas de sinistre pendant l'année considérée est :
   $P(X = 10) = \binom{15}{10} \times 0,6^{10} \times (1-0,6)^{15-10} \approx 0,186.$
3. La probabilité que, parmi les 15 conducteurs choisis, 13 conducteurs au moins n'aient pas de sinistre est :
   $P(X \geqslant 13) = 1 - P(X \leqslant 12) \approx 1 - 0,9729 \approx 0,027.$
4. L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $E(X) = np = 15 \times 0,6 = 9$.
   Dans un lot de 15 conducteurs, il y en a donc en moyenne 9 qui n'ont pas de sinistre sur l'année considérée.

Partie B - Étude du coût des sinistres

On considère la variable aléatoire C qui, à chaque sinistre tiré au hasard parmi les sinistres survenus, associe son coût en euros. On suppose que la variable aléatoire C suit la loi normale d'espérance $\mu = 1200$ et d'écart type $\sigma = 200$.

1. $P(800 \leqslant C \leqslant 1600) = P(\mu - 2\sigma \leqslant C \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$ d'après le cours.
   Donc 95 % des sinistres ont un coût compris entre 800 € et 1 200 €.
2. La probabilité qu'un sinistre tiré au hasard parmi les sinistres survenus coûte plus de 1 500 euros est : $P(C > 1500) \approx 0,067$.

Partie C - Nombre de sinistres pendant la première année de mise en service

Pour les véhicules de la flotte de cette entreprise, on a relevé le nombre de sinistres par véhicule pendant la première année de mise en service.

Pour les véhicules ayant eu au plus quatre sinistres, on a obtenu :

Nombre de sinistres : x_i	0	1	2	3	4
Nombre de véhicules : n_i	1 345	508	228	78	35

Le nuage de points $(x_i\ ;\ n_i)$ suggère de procéder à un ajustement exponentiel.
On pose donc $y = \ln n_i$.

1. On complète le tableau suivant en arrondissant les valeurs à 10^{-3}.

Nombre de sinistres : x_i	0	1	2	3	4
$y = \ln n_i$	7,204	6,230	5,429	4,357	3,555

2. On détermine, à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression de y en x sous la forme $y = ax + b$, où a et b sont à arrondir à 10^{-2} : $y = -0,92x + 7,19$.

3. $y = -0,92x + 7,19 \iff \ln(n) = -0,92x + 7,19 \iff n = \mathrm{e}^{-0,92x+7,19}$
$\iff n = \mathrm{e}^{-0,92x} \times \mathrm{e}^{7,19} \iff n = \left(\mathrm{e}^{-0,92}\right)^x \times \mathrm{e}^{7,19}$

Or $\mathrm{e}^{-0,92} \approx 0,4$ à $0,1$ près, et $\mathrm{e}^{7,19} \approx 1326$ à 1 près.

Donc $n = A \times B^x$ où $A = 1326$ et $B = 0,4$, c'est-à-dire $n = 1326 \times 0,4^x$.

4. À l'aide de l'équation précédente, on peut estimer le nombre de véhicules ayant eu six sinistres pendant leur première année de mise en circulation à $n = 1326 \times 0,4^6$ soit environ 5.

Exercice 2 **10 points**

Pour un promoteur immobilier, le coût de production, en millions d'euros, pour n villas construites, $0 \leqslant n \leqslant 10$, est modélisé par : $C(n) = 0,2n + 0,45\ln(8n+1)$.

Ce promoteur vend chaque villa 600 000 €.

Partie A

1. $C(4) \approx 2,37$ et $C(8) \approx 3,48$

2. $C(8)$ n'est pas le double de $C(4)$, donc le coût de production n'est pas proportionnel au nombre de villas construites.

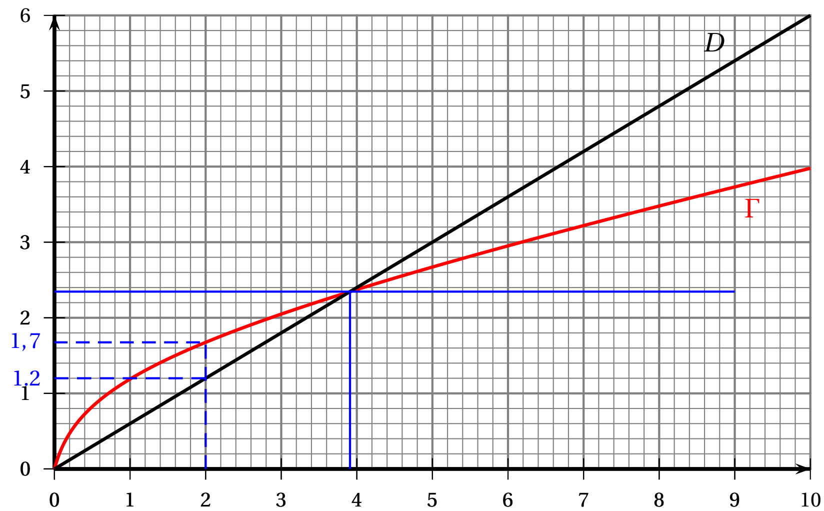
3. Chaque villa est vendue 600 000 € soit 0,6 million d'euros.
La recette, en million d'euros, générée par la vente de n villas est donc $R(n) = 0,6n$.

Partie B

On modélise le coût de production des villas et la recette générée par leur vente (en millions d'euros) par les fonctions f et g de la variable réelle x définies sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par :

$$f(x) = 0,2x + 0,45\ln(8x+1) \text{ et } g(x) = 0,6x.$$

Dans le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe Γ représentative de la fonction f, ainsi que la droite (D)) représentative de la fonction g.



1. **a.** Par lecture graphique :
   - le coût de production pour la construction de 2 villas est d'environ $1,7$ million d'euros;
   - la recette générée par la vente de 2 villas est de $1,2$ million d'euros.

   b. Pour la construction de 2 villas, le coût est supérieur à la recette obtenue donc le bénéfice est négatif
2. Pour avoir un bénéfice positif, il faut que la droite (D) soit au dessus de la courbe Γ, donc il faut construire au moins 4 villas.

Partie C

Dans cette partie on suppose que le promoteur a construit et vendu au moins une villa.

1. Le bénéfice réalisé pour la construction et la vente de n villas est, en millions d'euros : $B(n) = R(n) - C(n) = 0,6n - 0,2n - 0,45_l\, n(8n+1) = 0,4n - 0,45\ln(8n+1)$.
2. Soit la fonction h, définie sur l'intervalle $[1\,;\,10]$ par : $h(x) = 0,4x - 0,45\ln(8x+1)$.

   a. On note h' la fonction dérivée de h. Pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,10]$:
   $h'(x) = 0,4 - 0,45 \times \dfrac{8}{8x+1} = \dfrac{0,4(8x+1) - 0,45 \times 8}{8x+1} = \dfrac{3,2x + 0,4 - 3,6}{8x+1} = \dfrac{3,2x - 3,2}{8x+1}$
   $= \dfrac{3,2(x-1)}{8x+1}$.

b. On étudie le signe de $h'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,10]$.

x	1		10
$x-1$	0	$+$	
$8x+1$		$+$	
$h'(x)=\dfrac{3,2\,(x-1)}{8x+1}$	0	$+$	

c. $h(1)\approx -0,59$ et $h(10)\approx 2$

On établit le tableau de variation de h sur l'intervalle $[1\,;\,10]$.

x	1		10
$h'(x)$	0	$+$	
$h(x)$	$\approx -0,59$	$\nearrow$	≈ 2

3. **a.** On complète le tableau de variations de la fonction h.

x	1		α		10
$h(x)$	$\approx -0,59$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	≈ 2

On en déduit que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]1\,;\,10[$.

b. À la calculatrice on trouve que $h(3,9)\approx -0,002<0$ et $h(4)\approx 0,027>0$; on en déduit que $3,9<\alpha<4$ et donc que 4 est une valeur approchée à 1 près de α.

c. Le promoteur sera bénéficiaire pour un nombre de villas supérieur à α, donc à partir de 4 villas.