Corrigé du BTS Métropole – 16 mai 2024
SIO – Épreuve obligatoire

Exercice 1 **5 points**

Question 1. On pose $M = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&a\end{pmatrix}$ où a désigne un réel quelconque. Alors :

A : $M^2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&a^2\end{pmatrix}$	**B :** $M^2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&a+1&a^2\end{pmatrix}$	**C :** $M^2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\a&1&a\end{pmatrix}$

Réponse B

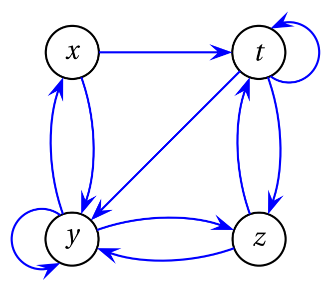
Question 2. Le nombre 323 :

A : est premier avec 420	**B :** est un nombre premier	**C :** est divisible par 9

$323 = 17 \times 19$ donc 323 n'est ni premier ni divisible par 9. **Réponse A**

Les questions **3, 4** et **5** portent sur le graphe orienté de sommets x, y, z et t, pris dans cet ordre, de matrice d'adjacence $M = \begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}$. On donne $M^3 = \begin{pmatrix}2&6&3&4\\3&7&5&4\\2&6&3&4\\3&8&5&5\end{pmatrix}$

Le dessin du graphe est :



Question 3. Le sommet y a :

A : 2 prédécesseurs	**B :** 3 prédécesseurs	**C :** 4 prédécesseurs

Il y a quatre 1 dans la deuxième colonne de la matrice M. **Réponse C**

Question 4. Le chemin suivant de longueur 4 est possible :

A : $z-y-t-x-y$	**B :** $z-t-t-y-x$	**C :** $x-y-z-t-x$

Réponse B

Question 5. Le nombre de chemins de longueur 3 d'origine t et d'extrémité y est égal à :

A : 6	**B :** 7	**C :** 8

Il y a un 8 à l'intersection de la 4$^{\text{e}}$ ligne (correspondant au z), et la 2$^{\text{e}}$ colonne (correspondant au y), dans la matrice M^3. **Réponse B**

Exercice 2 **5 points**

La norme de codage ASCII (American Standard Code for Information Interchange), défini aux États-Unis en 1963, associe aux caractères les plus utilisés dans les documents en langue anglaise un entier représentable en binaire sur 7 bits.

1. On peut encoder $2^7 = 128$ caractères.
2. Aux lettres majuscules A, B, ..., Z sont associés les nombres de 65 à 90, et aux lettres minuscules a, b, ..., z, ceux de 97 à 122.
   a. Le « a minuscule » correspond au nombre 97 donc le « d minuscule » correspond au nombre 100.

   $100 = 64+32+4 = 1\times 2^6+1\times 2^5+0\times 2^4+0\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2^1+0\times 2^0$ donc l'écriture binaire associée à la lettre « d minuscule » est $\overline{1100100}^{\,2}$.

   b. $\overline{1101101}^{\,2} = 1\times 2^6+1\times 2^5+0\times 2^4+1\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0 = 64+32+8+4+1 = 109$

   Le nombre 109 correspond à la lettre « m minuscule » donc c'est le « m minuscule » qui correspond à l'écriture binaire 1101101.
3. Lors de la transmission des données, pour éviter les erreurs, une méthode consiste à ajouter pour chaque caractère, un bit de parité à la fin du codage en binaire.

   Pour cela, on compte le nombre de 1 apparaissant dans le codage sur 7 bits d'un caractère : si le nombre obtenu est pair, on rajoute 0 à la fin du codage, sinon on rajoute 1. Chaque caractère est alors codé par un groupe de 8 bits appelé octet.

   On complète l'algorithme pour qu'il renvoie le code binaire sous forme de chaine de caractères, complété par le bit de parité.

```
Fonction ajoute_bit_parite(code)
  compt← 0
  Pour i allant de 0 à 6 Faire
      Si code[i] est égal à "1"
      Alors
        compt ← compt + 1
      Fin de Si
  Fin de Pour
  Si le reste de la division de compt par 2 est 0
  Alors
      code ← code + "0"
  Sinon
      code ← code + "1"
  Fin de Si
  Renvoyer code
```

Exercice 3 **10 points**

Partie A

La directrice d'une entreprise doit recruter une personne pour son équipe. Ce poste requiert des compétences professionnelles et humaines.

L'évaluation du candidat attribue une note sur 10 points à ses compétences professionnelles et une note sur 10 points à ses compétences humaines. Le total des points du candidat forme ainsi une note sur 20 appelée note finale.

Pour qu'un candidat soit sélectionné, il faut qu'au moins un des critères suivants soit respecté.

— le candidat a obtenu une note finale supérieure ou égale à 12 et il a eu au moins 5 points aux compétences humaines ;
— le candidat a obtenu une note finale inférieure strictement à 12 et il a obtenu 10 points aux compétences professionnelles ;
— le candidat n'a pas obtenu au moins 5 points aux compétences humaines et il a obtenu 10 points aux compétences professionnelles.

On définit les trois variables booléennes a, b, c de la façon suivante :

- a lorsque le candidat a obtenu une note finale supérieure ou égale à 12, $\overline{a}$ sinon ;
- b lorsque le candidat a obtenu au moins 5 points aux compétences humaines, $\overline{b}$ sinon :
- c lorsque le candidat a obtenu 10 points aux compétences professionnelles, $\overline{c}$ sinon.

1. On considère la proposition « Tous les candidats ont obtenu une note finale supérieure ou égale à 12 ».

   La négation de cette proposition « Il y a au moins un candidat qui a obtenu une note strictement inférieure à 12. »
2. On note E l'expression booléenne correspondant aux critères de sélection d'un candidat.
   a. On exprime E en fonction des variables booléennes a, b, c :
      - le candidat a obtenu une note finale supérieure ou égale à 12 et il a eu au moins 5 points aux compétences humaines, se traduit par « $a.b$ »
      - ou, se traduit par « + » ;
      - le candidat a obtenu une note finale inférieure strictement à 12 et il a obtenu 10 points aux compétences professionnelles, se traduit par « $\overline{a}.c$ » ;
      - ou, se traduit par « + » ;
      - le candidat n'a pas obtenu au moins 5 points aux compétences humaines et il a obtenu 10 points aux compétences professionnelles, se traduit par « $\overline{b}.c$ ».

      Donc $E = a.b + \overline{a}.c + \overline{b}.c$.

   b. On représente l'expression E dans un tableau de Karnaugh.

$a.b$

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0				
1			1	1

$\overline{a}.c$

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0		1	1	
1				

$\overline{b}.c$

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0		1		
1		1		

$$E = a.b + \overline{a}.c + \overline{b}.c$$

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0		1	1	
1		1	1	1

On en déduit une écriture simplifiée de l'expression booléenne E sous la forme d'une somme de deux termes.

$a \backslash bc$	00	01	11	10	
0		1	1		
1		1	1	1	$a.b$

c

Donc $E = a.b + c$.

c. On traduit la forme simplifiée de E à l'aide d'une phrase : « le candidat a obtenu une note finale supérieure ou égale à 12 et au moins 5 points aux compétences humaines, ou le candidat a obtenu 10 points aux compétences professionnelles. »

d. Un candidat a obtenu au moins 5 points aux compétences humaines, et il n'a pas obtenu 10 points aux compétences professionnelles. Cela correspond à « $b.\overline{c}$ ».

On place cet événement dans la table de Karnaugh représentant E ; il correspond aux cellules grisées.

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0		1	1	
1		1	1	1

Une des deux cellules grisées ne contient pas de 1, donc sa candidature ne peut être retenue; elle dépend de sa note finale : si elle est supérieure ou égale à 12 (codage $a.b.\overline{c}$), on peut retenir sa candidature. Sinon (codage $\overline{a}.b.\overline{c}$), on ne peut pas la retenir.

Partie B

Pour équiper ses bureaux, l'entreprise a besoin de tables, d'armoires et de chaises.
Ayant demandé un devis à trois fournisseurs notés A, B, C, l'entreprise a obtenu les renseignements suivants, où les prix sont en euros :

Fournisseur	Prix d'une armoire	Prix d'une table	Prix d'une chaise
A	240	120	80
B	220	140	60
C	260	160	40

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 240 & 120 & 80 \\ 220 & 140 & 60 \\ 260 & 160 & 40 \end{pmatrix}$.

1. L'entreprise envisage de commander 8 armoires, 6 tables et 8 chaises. Cependant, elle se fixe un budget maximum de 3 100 €.

   On considère la matrice colonne : $N = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$.

   a. $M \times N = \begin{pmatrix} 240 & 120 & 80 \\ 220 & 140 & 60 \\ 260 & 160 & 40 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \times 8 + 120 \times 6 + 80 \times 8 \\ 220 \times 8 + 140 \times 6 + 60 \times 8 \\ 260 \times 8 + 160 \times 6 + 40 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,280 \\ 3\,080 \\ 3\,360 \end{pmatrix}$

   b. La première ligne de la matrice $M \times N$ correspond au coût total de la commande chez le fournisseur A. La deuxième ligne de la matrice correspond au fournisseur B, et la troisième ligne au fournisseur C.

   c. Pour que le coût total soit inférieur à 3 100 €, il faut que l'entreprise passe commande auprès du fournisseur B.

2. Finalement, l'entreprise envisage une commande de 2 960 euros avec le fournisseur A, de 2 820 euros avec le fournisseur B et de 2 980 euros avec le fournisseur C.

   On note x le nombre d'armoires, y le nombre de tables et z le nombre de chaises correspondant à cette commande.

   On note X la matrice $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et Y la matrice $\begin{pmatrix} 2\,960 \\ 2\,820 \\ 2\,980 \end{pmatrix}$.

   a. Il faut que $M \times X = Y$.

   b. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{60} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{60} \\ -\frac{17}{600} & \frac{7}{150} & -\frac{1}{75} \\ \frac{1}{200} & \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{pmatrix}$ et la matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   On admet que $P \times M = I$.

   On peut en déduire que la matrice P est l'inverse de la matrice M.

   c. $M \times X = Y$ donc $P \times (M \times X) = P \times Y$ donc $(P \times M) \times X = P \times Y$ et donc $X = P \times Y$.

d. On cherche la matrice X telle que $MX = Y$; on a vu que cela correspondait à $X = PY$.

On calcule : $PY = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$

Le nombre de tables correspondant à cette commande est donc 8.