Corrigé du brevet de technicien supérieur 2017 Métropole Systèmes numériques

Exercice 1 **4 points**

Les questions de cet exercice à l'exception de la question 2. de la Partie A sont des questions à choix multiples. Une seule réponse est exacte. On l'indiquera sur la copie. Aucune justification n'est attendue.

On rappelle que la Transformée de Fourier Discrète (TFD) d'une séquence de nombres complexes $(x_0\ ;\ x_1\ ;\ x_2\ ;\ \dots\ ;\ x_{N-1})$, où N est un entier naturel non nul, est la séquence de nombres complexes $(X_0\ ;\ X_1\ ;\ X_2\ ;\ \dots\ ;\ X_{N-1})$ définie par :

$$X_\ell = \sum_{k=0}^{N-1} x_k w^{-k\ell}$$

pour tout entier ℓ compris entre 0 et $N-1$, avec $w = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{N}}$.

Soit le signal, noté f, périodique de période T défini par : $\left\{\begin{array}{lcl} f(t) & = & t \quad \text{si } t \in \left[0\ ;\ \frac{T}{2}\right] \\ f(t) & = & t-T \quad \text{si } t \in \left]\frac{T}{2}\ ;\ T\right] \end{array}\right.$

Partie A

1.

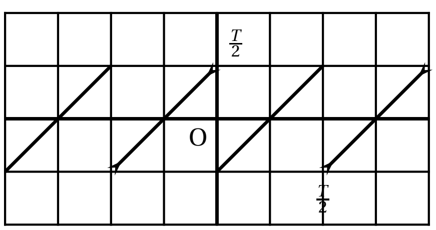


figure 1

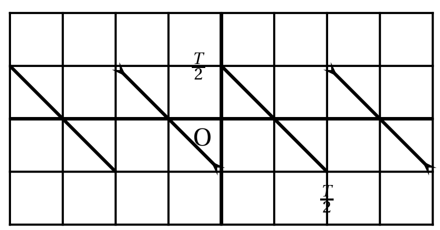


figure 2

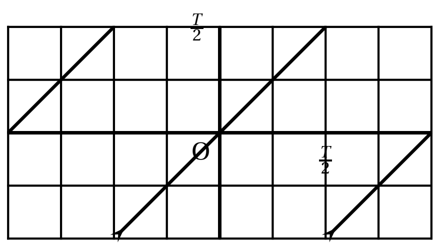


figure 3

Remarquons d'abord d'après les expressions de f sur les deux intervalles, que le coefficient directeur de la fonction, pour chacun des intervalles, est 1. Cela permet d'éliminer la fonction 2 pour laquelle il est de -1.

La fonction 1 est à rejeter également puisqu'on peut y lire que $f(0) = \dfrac{T}{2}$ alors que le calcul donne $f(0) = 0$.

$\boxed{\text{Il s'agit donc de la fonction 3}}$.

2. **a.** On lit facilement les valeurs sur le graphique 3.
Mais il est peut-être préférable de les obtenir par le calcul :
$0 \in \left[0\,;\,\frac{T}{2}\right] \Rightarrow \boxed{f(0)=0}$ et de même : $\frac{T}{4} \in \left[0\,;\,\frac{T}{2}\right] \Rightarrow @\left[0\,;\,\frac{T}{2}\right] \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{T}{2}\right)=\frac{T}{2}}$
Par contre $\frac{3T}{4} \in \left]\frac{T}{2}\,;\,T\right] \Rightarrow f\left(\frac{3T}{4}\right) = \frac{3T}{4} - T = -\frac{T}{4}$ on a donc $\boxed{f\left(\frac{3T}{4}\right) = -\frac{T}{4}}$

b. Je propose de calculer tous les X_ℓ (même si on ne demande que X_1) :

En entrée le signal temporel : $x_0 = 0$ $x_1 = 0,0025$ $x_2 = 0.005$ $x_3 = -0,0025$
On pose : $w = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{2}} = i$ et $X_\ell = \sum_{k=0}^{3} x_k \left(w^{-\ell}\right)^k$
On peut commencer par calculer les puissances négatives de w :
$w^0 = 1$ $w^{-1} = -i$ $w^{-2} = -1$ $w^{-3} = i$
$w^{-4} = 1$ $w^{-6} = -1$ $w^{-8} = 1$ $w^{-9} = -i$

$X_0 = x_0 \times 1 + x_1 \times 1 + x_2 \times 1 + x_3 \times 1 = 0 \times 1 + 0{,}0025 \times 1 + 0,005 \times 1 - 0,0025 \times 1 = 0,005$
$X_1 = x_0 \times 1 + x_1\left(w^{-1}\right)^1 + x_2\left(w^{-1}\right)^2 + x_3\left(w^{-1}\right)^3 = 0 \times 1 + 0{,}0025 \times (-\mathrm{i})^1 + 0{,}005 \times (-\mathrm{i})^2 - 0{,}0025 \times (-i)^3$
$\boxed{X_1 = 0,005\,(-1-\mathrm{i}).}$
$X_2 = x_0 \times 1 + x_1\left(w^{-2}\right)^1 + x_2\left(w^{-2}\right)^2 + x_3\left(w^{-2}\right)^3 = 0 \times 1 + 0,0025 \times (-1)^1 + 0,005 \times (-1)^2 - 0,0025 \times (-1)^3 = 0,005$
$X_3 = x_0 \times 1 + x_1\left(w^{-3}\right)^1 + x_2\left(w^{-3}\right)^2 + x_3\left(w^{-3}\right)^3 = 0 \times 1 + 0{,}0025 \times (\mathrm{i})^1 + 0,005 \times (i)^2 - 0{,}0025 \times (i)^3 = 0,005\,(-1+\mathrm{i}).$

Partie B

1. Le cours numérote les N valeurs de la suite (X_ℓ) de X_0 à X_{N-1} de même que dans le cours le sigma est $\sum_{k=0}^{N-1} x_k w^{-k\ell}$ donc k varie lui aussi de 0 à $N-1$. Il faut être un peu pervers pour faire des boucles pour de 1 à N; informatiquement parlant, ce serait une fort mauvaise idée car ce décalage de 1 risquerait d'induire le lecteur en erreur. Mais il s'agit d'un choix pour faire réfléchir le candidat; du fait de ce décalage, il faut mettre en exposants $\ell - 1$ et $k - 1$.
$\boxed{\text{C'est donc la proposition a qu'il faut retenir.}}$

2. $\boxed{\text{C'est bien entendu (voir cours) la proposition b}}$

3. Il s'agit ni plus ni moins du X_3 calculé (en plus) au 2.2. de la partie A c'est à dire
$\boxed{X_3 = -0,005 + 0,005\,\mathrm{i} \text{ proposition b}}$

Exercice 2 **5 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A

Dans cette partie, les résultats seront arrondis Ã 10^{-3}.

Lors de la fabrication de ces conducteurs ohmiques, on observe des variations au niveau de la valeur de la résistance. On admet que la résistance, exprimée en Ohms (Ω), d'un conducteur ohmique peut être modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 1000$ et $\sigma = 40$.

1. On cherche en fait, avec la loi normale de moyenne $\mu = 1\,000$ et $\sigma = 40$ la probabilité $P(X \geqslant 1040)$.
   Cette probabilité s'obtient par la calculatrice en demandant $P\left(1\,040 \leqslant X \leqslant 10^{99}\right) \approx 0,159$
2. La probabilité qu'il soit vendable est de $P(935 \leqslant X \leqslant 1065) \approx 0,896$
   $\boxed{\text{Celle qu'il soit invendable est donc de } 1 - 0,896 = 0,104.}$

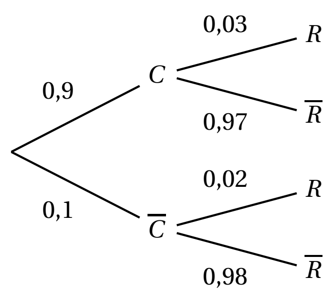
Partie B

Lors de la fabrication de ces conducteurs ohmiques, 10 % d'entre eux sont non conformes à la vente. Un contrôle qualité permet de rejeter 98 % des composants non conformes à la vente. Malheureusement, lors de ce contrôle qualité, 3 % des conducteurs ohmiques tout à fait conformes sont également rejetés.
On utilisera les notations suivantes :

- C l'évènement « le conducteur ohmique est conforme à la vente » ;
- R l'évènement « le conducteur ohmique est rejeté après le contrôle qualité ».

On choisit au hasard un composant issu de la fabrication.

1. On peut faire l'arbre suivant :.



2. On cherche $P\left(R \cap \overline{C}\right) = p\left(\overline{C}\right) \times P_{\overline{C}}(R)$ donc $P\left(R \cap \overline{C}\right) = 0,1 \times 0,98 = 0,098$
   $\boxed{\text{La probabilité qu'il soit non conforme et rejeté est de } 0,098}$.
3. D'après la loi de probabilités totales, $P(R) = P(R \cap C) + P\left(R \cap \overline{C}\right)$ donc
   $P(R) = 0,9 \times 0,03 + 0,1 \times 0,98 = 0,125$.
   $\boxed{\text{La probabilité qu'il soit rejeté est bien de } 0,125}$
4. On cherche cette fois $P_R(C) = \dfrac{P(R \cap C)}{P(R)} = \dfrac{0,9 \times 0,03}{0,125} = 0,216$
   $\boxed{\text{La probabilité qu'il soit en fait conforme à la vente sachant qu'il a été rejeté est de } 0,216}$

Partie C

Des études ont montré que la durée de vie moyenne de ces conducteurs ohmiques est de 2500 heures. On modélise la durée de vie, en heures, de ces conducteurs ohmiques par une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que pour la loi exponentielle, la moyenne est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$. $\boxed{\text{On a donc } \lambda = \dfrac{1}{2500} = 0,0004}$
2. La probabilité que la durée de vie d'un conducteur ohmique soit supérieure à 3000 heures vaut $\boxed{\mathrm{e}^{-0,0004 \times 3000} = 0,301}$.
   En effet, $P(X \geqslant T)$ est la fonction de fiabilité et vaut dans le cas général $\mathrm{e}^{-\lambda T}$.
   On peut aussi considérer que cette probabilité est égale à $1 - P(X \leqslant T) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda T}\right)$

Exercice 3 **5 points**

Dans cet exercice, les résultats numériques seront arrondis à 10^{-2}.

Pour faire face à l'explosion des besoins de transmission de données, la fibre optique s'est imposée dans la plupart des réseaux de télécommunication.
Une des caractéristiques d'une fibre est son *coefficient d'atténuation*, exprimé en décibels par kilomètre (dB/km), qui permet de mesurer la perte de puissance d'un signal lumineux transmis, en fonction de la longueur de la ligne.
Dans tout l'exercice on note : L la longueur de la fibre en kilomètres, P_e la puissance du signal lumineux à l'entrée de la fibre et P_s la puissance du signal lumineux à la sortie de la fibre. Ces puissances sont exprimées en mW.
Le coefficient d'atténuation A est donné par la formule :

$$A = \frac{4,343}{L} \ln\left(\frac{P_e}{P_s}\right).$$

1. Un fabricant de fibre annonce dans son catalogue un coefficient d'atténuation de 0,9 dB/km. Un technicien procède à des vérifications sur des fibres de différentes longueurs. Pour cela, il envoie un signal d'entrée de puissance $P_e = 5$ mW et mesure le signal obtenu à la sortie d'une fibre de 5 km, puis d'une fibre de 10 km.

a. Le coefficient d'atténuation vaut alors : $A = \dfrac{4,343}{5} \ln\left(\dfrac{5}{1,77}\right) \approx 0,90$ arrondi à 10^{-2}

$\boxed{\text{Ce résultat est parfaitement cohérent avec l'annonce du fabricant}}$

b. Il me semble que le plus simple est de répondre d'abord à la question suivante.
De l'expression$A = \dfrac{4,343}{L} \ln\left(\dfrac{P_e}{P_s}\right)$ on tire : $\ln\left(\dfrac{P_e}{P_s}\right) = \dfrac{AL}{4,343}$ donc $\dfrac{P_e}{P_s} = \mathrm{e}^{\frac{AL}{4,343}}$ et pour finir $P_S = \dfrac{P_e}{\mathrm{e}^{\frac{AL}{4,343}}}$, ou encore $\boxed{P_S = P_e \times \mathrm{e}^{\frac{-AL}{4,343}}}$. On a donc ici $P_S = 5 \times \mathrm{e}^{\frac{-0,9\times 10}{4,343}}$ c'est à dire

$\boxed{P_S = 5 \times \mathrm{e}^{\frac{-0,9\times 10}{4,343}} \approx 0,63}$

c. Voir ci-dessus.

2. La solution générale de l'équation différentielle (E) : $y'(x) = -0,21y(x)$ est $y(x) = C\mathrm{e}^{-0,21x}$
La solution de l'équation (E) vérifiant la condition initiale : $y(0) = 5$ est donc donnée par $C\mathrm{e}^{-0,21\times 0} = 5$ donc $C = 5$.

$\boxed{\text{Cette solution est donc } f(x) = 5\mathrm{e}^{-0,21x}.}$

3. On admet dans cette question que la puissance du signal mesurée à la sortie de la fibre est modélisée par la fonction f définie par $f(x) = 5\mathrm{e}^{-0,21x}$.
Le signal doit être amplifié lorsqu'il a perdu 90 % de sa puissance initiale c'est à dire lorsque $5\mathrm{e}^{-0,21x} \leqslant 0,1$ donc $\mathrm{e}^{-0,21x} \leqslant \dfrac{0,1}{5}$ c'est à dire,

« en passant au ln », la fonction ln étant croissante : $-0,21x \leqslant \ln\left(\dfrac{0,1}{5}\right)$.

En divisant par $-0,21$ (nombre négatif) il faudra amplifier pour $x \geqslant \dfrac{\ln\left(\dfrac{0,1}{5}\right)}{-0,21} = 18,629$

$\boxed{\text{c'est à dire à partir de } 18,63 \text{ km}}$

4. Le signal transmis est maintenant modélisé par la fonction S définie par : $S(t) = 5\sin(2t)$.
L'énergie E transportée sur une période par le signal S est donnée par la formule :
$E = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} [5\sin(2t)]^2\,\mathrm{d}t$.

a. On a donc $E = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} [5\sin(2t)]^2\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 25\sin^2(2t)\,\mathrm{d}t = 50\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2t)\,\mathrm{d}t$

Sachant : $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ on a $\sin^2(2t) = \dfrac{1-\cos(2\times 2t)}{2} = \dfrac{1-\cos(4t)}{2}$

On a alors $E = 50\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\cos(4t)}{2}\,\mathrm{d}t = 50\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{2}\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(4t)}{2}\,\mathrm{d}t\right)$ donc

$E = 50\left(\left[\dfrac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(4t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$.

Or $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(2\pi)}{4} - \dfrac{\sin(0)}{4}\right) = 0$. $\boxed{\text{Il reste donc } E = 50\times\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{25\pi}{2}}$

b. Une valeur approchée de E à 10^{-1} près est alors : $\boxed{E = \dfrac{25\pi}{2} \approx 39,3}$.

Exercice 4 **6 points**

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes

Partie A

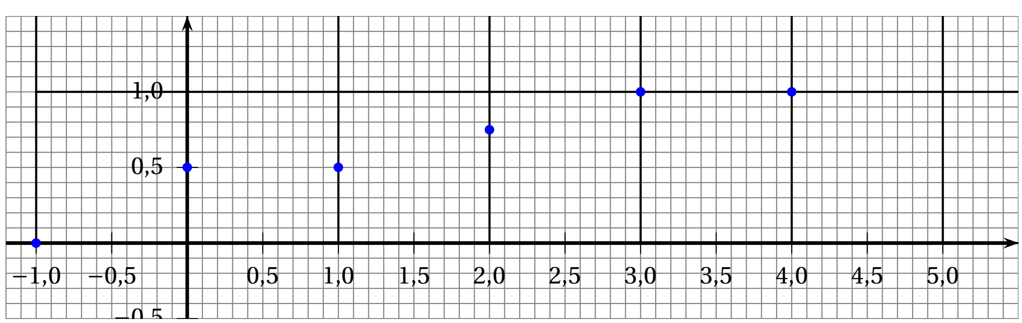
La variation du niveau de liquide dans un capteur capacitif fait varier la fréquence de l'oscillateur dans lequel il est inséré. Le signal de sortie de l'oscillateur est ensuite traité numériquement.
Ce système peut être utilisé, par exemple pour mesurer la quantité de carburant dans le réservoir d'un avion. Son objectif est de « lisser » les variations brutales du niveau de carburant dans le réservoir, qui pourraient être dues par exemple à des trous d'air que traverserait l'avion.
Le réservoir en mouvement autour d'une position moyenne horizontale engendre des variations de niveau sur le capteur qu'il faut éliminer par traitement numérique. On utilise pour cela un filtre passe bas (réalisant un moyennage sur 4 échantillons).

x représente le signal discret causal issu de la numérisation du signal d'entrée et y le signal discret causal correspondant au signal de sortie. Une période d'échantillonnage T_e étant choisie, les signaux x et y vérifient pour tout entier n la relation (R) suivante :

$$y(n) = \frac{1}{4}\left[x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)\right] \qquad (R)$$

1. Étude de cas particuliers

a. Dans le cas où x est l'échelon unité discret : $\begin{cases} x(n) = 0 & \text{si } n < 0 \\ x(n) = 1 & \text{si } n \geqslant 0 \end{cases}$, représenter sur la figure 1 en annexe, le signal discret y pour n entier tel que $-1 \leqslant n \leqslant 5$.
On a $x(-4) = x(-3) = x(-2) = x(-1) = 0$ et $x(0) = 1$ puis pour $n \geqslant 1$: $x(n) = 1$
Donc pour $n = -1$: $y(-1) = \frac{1}{4}(x(-1) + x(-2) + x(-3) + x(-4)) = \frac{1}{4}(0+0+0+0) = 0$
pour $n = 0$: $y(0) = \frac{1}{4}(x(0) + x(-1) + x(-2) + x(-3)) = \frac{1}{4}(1+0+0+0) = \frac{1}{4}$
pour $n = 1$: $y(1) = \frac{1}{4}(x(1) + x(0) + x(-1) + x(-2)) = \frac{1}{4}(1+1+0+0) = \frac{1}{2}$
pour $n = 2$: $y(2) = \frac{1}{4}(x(2) + x(1) + x(0) + x(-1)) = \frac{1}{4}(1+1+1+0) = \frac{3}{4}$
pour $n = 3$: $y(3) = \frac{1}{4}(x(3) + x(2) + x(1) + x(0)) = \frac{1}{4}(1+1+1+1) = 1$
pour $n = 4$: $y(4) = \frac{1}{4}(x(4) + x(3) + x(2) + x(11)) = \frac{1}{4}(1+1+1+1) = 1$
et pour $n \geqslant 4$ on aura $y(n) = 1$.
D'où le graphique :



On peut ainsi vérifier que le filtre passe-bas laisse passer le signal continu reçu en entrée.

b. Une variation non significative du niveau de liquide dans le réservoir peut être assimilée à une entrée impulsionnelle.

Dans ce cas, x est défini pour tout n entier par : $\left\{\begin{array}{lcl} x(0) & = & 1 \\ x(n) & = & 0 \quad \text{si } n \neq 0 \end{array}\right.$

On a cette $x(-4) = x(-3) = x(-2) = x(-1) = 0$ et $x(0) = 1$ puis pour $n \geqslant 1$ $x(n) = 0$

Donc pour $n = -1$: $y(-1) = \dfrac{1}{4}(x(-1) + x(-2) + x(-3) + x(-4)) = \dfrac{1}{4}(0+0+0+0) = 0$

pour $n = 0$: $y(0) = \dfrac{1}{4}(x(0) + x(-1) + x(-2) + x(-3)) = \dfrac{1}{4}(1+0+0+0) = \dfrac{1}{4}$

pour $n = 1$: $y(1) = \dfrac{1}{4}(x(1) + x(0) + x(-1) + x(-2)) = \dfrac{1}{4}(0+1+0+0) = \dfrac{1}{4}$

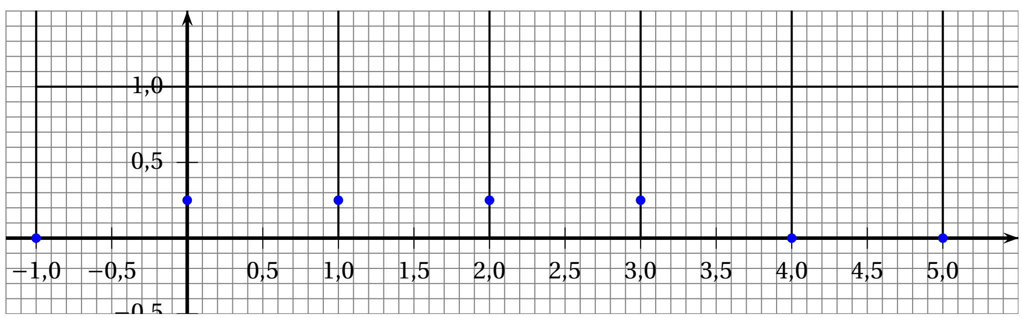
pour $n = 2$: $y(2) = \dfrac{1}{4}(x(2) + x(1) + x(0) + x(-1)) = \dfrac{1}{4}(0+0+1+0) = \dfrac{1}{4}$

pour $n = 3$: $y(3) = \dfrac{1}{4}(x(3) + x(2) + x(1) + x(0)) = \dfrac{1}{4}(0+0+0+1) = \dfrac{1}{4}$

pour $n = 4$: $y(4) = \dfrac{1}{4}(x(4) + x(3) + x(2) + x(1)) = \dfrac{1}{4}(0+0+0+0) = 0$

et pour $n \geqslant 4$ on aura $y(n) = 0$.

D'où le graphique :



On peut vérifier, dans ce cas, qu'une impulsion de 1 *en entrée se retrouve divisée par* 4 *en sortie. En réalité le moyennage s'effectue sur* 100 *échantillons, l'impulsion de* 1 *en entrée est alors divisée par* 100.

2. Étude du cas général

On note respectivement X et Y les transformées en Z de x et de y.

On rappelle dans le tableau en fin d'exercice les formules de transformations

a. La transformation en z appliquée à la relation (R), permet d'écrire :

$Y(z) = \dfrac{1}{4}\left(X(z) + z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) + z^{-3}X(z)\right)$

c'est à dire $Y(z) = \dfrac{1}{4}X(z)\left(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}\right)$ donc $\boxed{F(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{1}{4}\left(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}\right)}$

.

b. On note ω la pulsation du signal d'entrée. $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega T_e} \Rightarrow z^{-1} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T_e}$, $z^{-2} = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega T_e}$ et $z^{-3} = \mathrm{e}^{-3i\omega T_e}$

$\boxed{\text{On a donc bien } F\left(\mathrm{e}^{i\omega T_e}\right) = \dfrac{1}{4}\left[1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T_e} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega T_e} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\omega T_e}\right]}$.

c. En factorisant l'expression ci-dessus par $\mathrm{e}^{-1,5\mathrm{i}\omega T_e}$, il vient :

$F\left(\mathrm{e}^{i\omega T_e}\right) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-1,5\mathrm{i}\omega T_e}\left[\mathrm{e}^{+1,5i\omega T_e} + \mathrm{e}^{0,5i\omega T_e} + \mathrm{e}^{-0,5i\omega T_e} + \mathrm{e}^{-1,5\mathrm{i}\omega T_e}\right]$

En regroupant les termes : $F\left(e^{i\omega T_e}\right) = \dfrac{1}{4}e^{-1,5i\omega T_e}\left[e^{+1,5i\omega T_e} + e^{-1,5i\omega T_e} + e^{0,5i\omega T_e} + e^{-0,5i\omega T_e}\right]$

Or d'après la formule rappelée (formule d'Euler) $e^{-\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos(\alpha)$ donc $e^{+1,5i\omega T_e} + e^{-1,5i\omega T_e} = 2\cos(1,5\omega T_e)$ et $e^{0,5i\omega T_e} + e^{-0,5i\omega T_e} = 2\cos(0,5\omega T_e)$.

On en déduit que $F\left(e^{i\omega T_e}\right) = \dfrac{1}{4}e^{-1,5i\omega T_e}\left(2\cos(1,5\omega T_e) + 2\cos(0,5\omega T_e)\right)$

$\boxed{\text{donc } F\left(e^{i\omega T_e}\right) = 0,5\left(\cos(1,5\omega T_e) + \cos(0,5\omega T_e)\right)e^{-1,5i\omega T_e}}$

d. La période d'échantillonnage T_e est suffisamment petite pour que $\cos(1,5\omega T_e)$ et $\cos(0,5\omega T_e)$ soient positifs.

On a : $\left|F\left(e^{i\omega T_e}\right)\right| = |0,5\left(\cos(1,5\omega T_e) + \cos(0,5\omega T_e)\right)| \times \left|e^{-1,5i\omega T_e}\right|$

Or $\left|e^{-1,5i\omega T_e}\right| = 1$ et $|0,5\left(\cos(1,5\omega T_e) + \cos(0,5\omega T_e)\right)| =$
$0,5\left(\cos(1,5\omega T_e) + \cos(0,5\omega T_e)\right) > 0$.

Donc $F\left(e^{i\omega T_e}\right) = \left|F\left(e^{i\omega T_e}\right)\right| \times e^{-1,5i\omega T_e}$ qui prouve que $\arg\left(F\left(e^{i\omega T_e}\right)\right) = -1,5i\omega T_e$

$\boxed{\text{On a donc } \left|F\left(e^{i\omega T_e}\right)\right| = 0,5\left(\cos(1,5\omega T_e) + \cos(0,5\omega T_e)\right) \text{ et } \arg\left(F\left(e^{i\omega T_e}\right)\right) = -1,5i\omega T_e}$

L'argument de $F\left(e^{i\omega T_e}\right)$ permet de lire le retard introduit par ce filtre dans la transmission des informations.

Partie B

On note r, le signal causal discret vérifiant $r(n) = n$ pour tout n entier naturel.
Soit t le signal causal discret vérifiant pour tout n entier naturel l' équation aux différences :

$$t(n+2) + t(n+1) - 6t(n) = r(n+2) + r(n+1).$$

Avec les conditions initiales suivantes : $t(0) = 0$ et $t(1) = 1$.

1. Sachant que : $a(n) = r(n+2) + r(n+1)$ on a $A(z) = z^2\left(R(z) - r(0) - z^{-1}r(1)\right) + z\left(R(z) - r(0)\right)$
Or : $r(0) = 0$ et $r(1) = 1$ donc $A(z) = z^2\left(R(z) - z^{-1}\right) + zR(z)$
C'est à dire $\boxed{A(z) = \left(z^2 + z\right)R(z) - z}$

2. Soit T la transformée en Z de t. On admet que : $\dfrac{T(z)}{z} = \dfrac{z^2 + z}{(z-1)^2(z-2)(z+3)}$.
Un logiciel de calcul formel donne le résultat ci-dessous :

partfrac ((z ∧ 2 + z) / ((z - 1) ∧ 2 ⋆ (z - 2) ⋆ (z + 3)))
$\dfrac{6}{(z-2)\star 5} - \dfrac{1}{(z-1)^2\star 2} - \dfrac{9}{(z-1)\star 8} - \dfrac{3}{(z+3)\star 40}$

On a donc $T(z) = \dfrac{6}{5}\dfrac{z}{z-2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{z}{(z-1)^2} - \dfrac{9}{8}\dfrac{z}{z-1} - \dfrac{3}{40}\dfrac{z}{z+3}$

$\boxed{\text{D'après le formulaire : } t(n) = \left(\dfrac{6}{5}\times 2^n - \dfrac{1}{2}n - \dfrac{9}{8} - \dfrac{3}{40}(-3)^n\right)\mathcal{U}_n}$

où $\mathcal{U}_n$ désigne l'échelon unité valant 1 pour $n \geqslant 0$.

<u>Quelques développements</u> : retrouvons l'expression $\dfrac{T(z)}{z} = \dfrac{z^2 + z}{(z-1)^2(z-2)(z+3)}$

Posons $b_n = t(n+2) + t(n+1) - 6t(n)$ on a donc $B(z) = z^2\left(T(z) - t(0) - z^{-1}t(1)\right) + z\left(T(z) - t(0)\right) - 6T(z)$
Avec $t(0) = 0$ et $t(1) = 1$. On a donc : $B(z) = z^2\left(T(z) - z^{-1}\right) + zT(z) - 6T(z) = T(z)\left(z^2 + z - 6\right) - z$

L'équation aux différences devient donc $T(z)\left(z^2 + z - 6\right) - z = \left(z^2 + z\right)R(z) - z \Rightarrow T(z)\left(z^2 + z - 6\right) = \left(z^2 + z\right)R(z)$

C'est à dire $T(z) = \dfrac{z^2+z}{z^2+z-6} R(z)$. Or $r_n = n$ pour $n \geqslant 0$. C'est « la rampe ». Donc $R(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$

On a alors $T(z) = \dfrac{z^2+z}{z^2+z-6} \times \dfrac{z}{(z-1)^2}$ c'est à dire $\dfrac{T(z)}{z} = \dfrac{z^2+z}{z^2+z-6} \times \dfrac{1}{(z-1)^2}$.
Il suffit de remarquer que $z^2+z-6 = (z+3)(z-2)$ pour obtenir l'expression donnée par l'énoncé.

Encore un effort : calculons les premiers termes de la suite (t_n) par l'équation récurrente puis par l'expression trouvée à la fin (pour confirmation).

$$\left\{\begin{array}{l} t(n+2)+t(n+1)-6t(n) = r(n+2)+r(n+1) \\ t(0) = 0 \\ t(1) = 1 \\ r(n) = n\mathcal{U}_n \end{array}\right.$$

pour $n = 0$: $t(2)+t(1)-6t(0) = r(2)+r(1) \Rightarrow t(2)+1 = 3 \Rightarrow t(2) = 2$
pour $n = 1$: $t(3)+t(2)-6t(1) = r(3)+r(2) \Rightarrow t(3)+2-6 = 5 \Rightarrow t(3) = 9$
pour $n = 2$: $t(4)+t(3)-6t(2) = r(4)+r(3) \Rightarrow t(4)+9-12 = 7 \Rightarrow t(4) = 10$

Avec la formule trouvée : $t(n) = \left(\dfrac{6}{5} \times 2^n + \dfrac{1}{2} n - \dfrac{9}{8} - \dfrac{3}{40}(-3)^n\right)\mathcal{U}_n$

$t(0) = \dfrac{6}{5} \times 2^0 - \dfrac{1}{2} \times 0 - \dfrac{9}{8} - \dfrac{3}{40} \times (-3)^0 = 0$
$t(1) = \dfrac{6}{5} \times 2^1 - \dfrac{1}{2} \times 1 - \dfrac{9}{8} - \dfrac{3}{40} \times (-3)^1 = 1$
$t(2) = \dfrac{6}{5} \times 2^2 - \dfrac{1}{2} \times 2 - \dfrac{9}{8} - \dfrac{3}{40} \times (-3)^2 = 2$
$t(3) = \dfrac{6}{5} \times 2^3 - \dfrac{1}{2} \times 3 - \dfrac{9}{8} - \dfrac{3}{40} \times (-3)^3 = 9$
$t(4) = \dfrac{6}{5} \times 2^4 - \dfrac{1}{2} \times 4 - \dfrac{9}{8} - \dfrac{3}{40} \times (-3)^4 = 10$