

Baccalauréat C groupe 3

Juin 1984

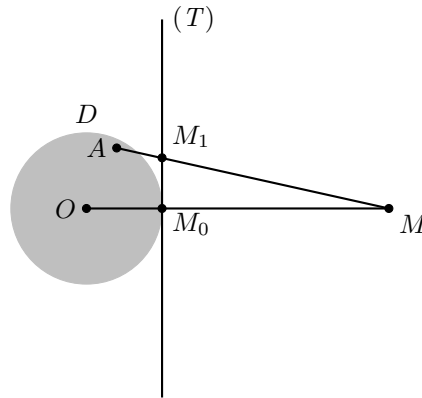
Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg

Exercice 1

4 points

- La tangente (T) au cercle unité en M_0 partage le plan en deux demi-plans. L'un des deux contient le disque unité, l'autre contient le point M extérieur à D . Tout segment partant d'un point A de D et se terminant en M coupe donc la tangente (T) en un point noté M_1 avec $MM_1 \leq MA$. La tangente (T) étant perpendiculaire à (OM) en M_0 , on a : $MM_0 \leq MM_1$ (distance d'un point à une droite) et donc $MM_0 \leq MA$.

Cela montre que $d(M, D) = MM_0$.



- Comme les points O , M_0 et M sont alignés avec M_0 entre O et M , on a :
 $OM = OM_0 + M_0M = OM_0 + MM_0$.
 Par définition $OM_0 = 1$ et comme le repère est orthonormé, $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.
 On en déduit $MM_0 = OM - OM_0 = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$ c'est-à-dire :
 $d(M, D) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$
- On a $d(M, \Delta) = |y + 2|$. Les coordonnées des points recherchés vérifient l'équation $\sqrt{x^2 + y^2} - 1 = 2|y + 2|$.

Cas $y \geq -2$: on a alors $\sqrt{x^2 + y^2} - 1 = 2(y + 2)$, c'est-à-dire :

$\sqrt{x^2 + y^2} = 2y + 5$. Après mise au carré et simplification, on obtient :

$$\left(\frac{y + \frac{10}{3}}{\frac{5}{3}}\right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1.$$

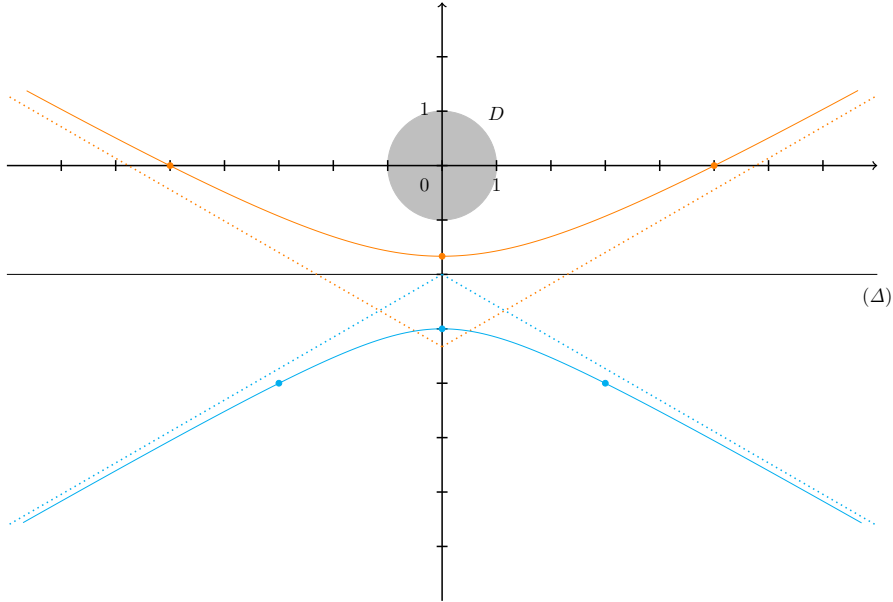
C'est une hyperbole de branches asymptotiques $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{10}{3}$, de directrice $y = -\frac{10}{3}$ et de sommets $(0 ; -\frac{5}{3})$ et $(0 ; -5)$. Seule la branche supérieure de sommet $(0 ; -\frac{5}{3})$ est compatible avec la condition $y \geq -2$. Cette branche dessinée en orange passe par les points $(0 ; -\frac{5}{3})$ (sommet), $(-5 ; 0)$ et $(5 ; 0)$ qui vérifient bien $d(M, D) = 2d(M, \Delta)$.

Cas $y < -2$: on a alors $\sqrt{x^2 + y^2} - 1 = -2(y + 2)$, c'est-à-dire :

$\sqrt{x^2 + y^2} = -2y - 3$. Après mise au carré et simplification, on obtient :

$$(y + 2)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1.$$

C'est une hyperbole de branches asymptotiques $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$, de directrice $y = -2$ et de sommets $(0 ; -1)$ et $(0 ; -3)$. Seule la branche inférieure de sommet $(0 ; -3)$ est compatible avec la condition $y < -2$. Cette branche dessinée en bleu passe par les points $(0 ; -3)$ (sommet), $(-3 ; -4)$ et $(3 ; -4)$ qui vérifient bien $d(M, D) = 2d(M, \Delta)$.



Exercice 2

4 points

1. Pour $x \neq 0$, $F(x) = \int_0^1 e^{tx^2} dt = \left[\frac{1}{x^2} e^{tx^2} \right]_0^1 = \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$.

$$F(0) = \int_0^1 1 dt = 1.$$

Comme $\frac{e^x - e^0}{x - 0}$ a pour limite en 0 la dérivée de la fonction exponentielle en 0, on a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = e^0 = 1$ et par composition avec la fonction carrée $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 1 = F(0)$. La fonction F est donc continue en 0 et est ainsi continue sur \mathbb{R} .

2. Le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction exponentielle est : $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Au voisinage de 0, on a :

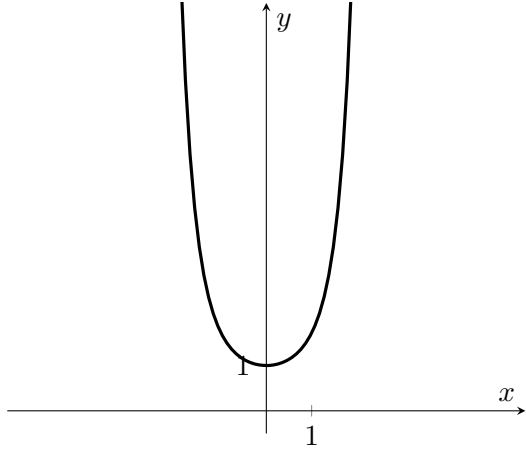
$$F(x) = \frac{1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) - 1}{x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Au voisinage de 0, $\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1}{x} = \frac{x}{2} + o(x)$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{2} + o(x) \right) = 0$, on peut conclure que F est dérivable en 0 et donc $F'(0) = 0$.

3. Par croissance de la fonction carré sur \mathbb{R}_+ , $0 \leq x \leq x'$ implique $x^2 \leq x'^2$. Ce qui implique $tx^2 \leq tx'^2$ pour $t \in [0; 1]$ et par croissance de l'intégrale sur les bornes 0 et 1 ≥ 0 : $\int_0^1 e^{tx^2} dt \leq \int_0^1 e^{tx'^2} dt$, c'est-à-dire $F(x) \leq F(x')$.

Sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, en composant avec la fonction carré, on a alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, on peut conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

4. On remarque que $F(-x) = F(x)$, F est donc une fonction paire. F est continue sur \mathbb{R} , croissante sur \mathbb{R}_+ et par parité, décroissante sur \mathbb{R}_- . Elle a un minimum en $(0 ; 1)$.



PROBLÈME

12 points

Partie A

1. Soient M de coordonnées $(x ; y)$ et $M' = s(M)$ de coordonnées $(x' ; y')$. s est la similitude directe de centre O , d'angle $\frac{3\pi}{4}$, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$. La définition analytique de s est :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{3\pi}{4} & -\sin \frac{3\pi}{4} \\ \sin \frac{3\pi}{4} & \cos \frac{3\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Soit $M'' = s \circ s(M)$ de coordonnées $(x'' ; y'')$, alors :

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = S^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ avec } S^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{OM''} \text{ a pour composantes } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{OM'} \text{ a pour composantes } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -x - y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{OM} \text{ a pour composantes } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Par somme vectorielle : $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -x - y \\ x - y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cela prouve que $\overrightarrow{OM''} + \overrightarrow{OM'} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OM} = \vec{0}$.

Partie B

1. En appliquant A.2 pour M_n , $M_{n+1} = s(M_n)$ et $M_{n+2} = s \circ s(M_n)$:

$$\overrightarrow{OM_{n+2}} + \overrightarrow{OM_{n+1}} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OM_n} = \vec{0}.$$

Il en résulte que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} + x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n = 0$ et $y_{n+2} + y_{n+1} + \frac{1}{2}y_n = 0$.

2. Initialisation : sachant d'après B.1 que $u_2 + u_1 = -\frac{1}{2}u_0$,
pour $n = 0$, $-\frac{2}{5}u_{n+2} - \frac{4}{5}u_{n+1} + \frac{2}{5}u_1 + \frac{4}{5}u_0 = -\frac{2}{5}u_2 - \frac{4}{5}u_1 + \frac{2}{5}u_1 + \frac{4}{5}u_0 =$
 $-\frac{2}{5}(u_2 + u_1) + \frac{4}{5}u_0 = \frac{1}{5}u_0 + \frac{4}{5}u_0 = u_0 = \sum_{k=0}^0 u_k.$

La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n .

Sachant d'après B.1 que $u_{n+1} = -2(u_{n+2} + u_{n+3})$,

$$\sum_{k=0}^{n+1} u_k = u_{n+1} + \sum_{k=0}^n u_k = u_{n+1} - \frac{2}{5}u_{n+2} - \frac{4}{5}u_{n+1} + \frac{2}{5}u_1 + \frac{4}{5}u_0 = -\frac{2}{5}u_{n+2} + \frac{1}{5}u_{n+1} + \frac{2}{5}u_1 + \frac{4}{5}u_0 = -\frac{2}{5}u_{n+2} - \frac{2}{5}(u_{n+2} + u_{n+3}) + \frac{2}{5}u_1 + \frac{4}{5}u_0 = -\frac{2}{5}u_{n+3} - \frac{4}{5}u_{n+2} + \frac{2}{5}u_1 + \frac{4}{5}u_0.$$

La propriété est alors vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la proposition est vraie au rang $n = 0$ et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle l'est aussi au rang $n + 1$. D'après l'axiome de récurrence, la proposition est vraie pour tout n .

3. La composée s^n de n similitudes s est une similitude de rapport $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ et de rapport $n\frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$. Comme $OM_0 = 1$, il en résulte que $OM_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$. C'est une suite géométrique dont la raison vérifie $0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, ce qui implique $\lim_{n \rightarrow \infty} OM_n = 0$ et par conséquence $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

4. $M_1 = s(M_0)$ et $(x_0 ; y_0) = (1 ; 0)$. Les coordonnées de M_1 sont donc :

$$(x_1 ; y_1) = \left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x_n = \frac{2}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_0 = \frac{3}{5}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n y_n = \frac{2}{5}y_1 + \frac{4}{5}y_0 = \frac{1}{5}.$$

Partie C

1. Comme $\overrightarrow{V(t)} = \sigma(\overrightarrow{OM(t)})$, les composantes de $\overrightarrow{V(t)}$ en fonction des coordonnées de $M(t)$ sont :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Par linéarité de la dérivation, les composantes de $\overrightarrow{\Gamma(t)}$ sont :

$$\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

Ce qui prouve que $\overrightarrow{\Gamma(t)} = \sigma(\overrightarrow{V(t)})$.

2. Soient M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$, $M' = s(M)$ et $M'' = s(M')$, alors $\overrightarrow{OM'} = \sigma(\vec{v})$ et $\overrightarrow{OM''} = \sigma \circ \sigma(\vec{v})$. L'application de A.2 donne $\sigma \circ \sigma(\vec{v}) + \sigma(\vec{v}) + \frac{1}{2}\vec{v} = \vec{0}$, c'est-à-dire $\sigma^2 + \sigma + \frac{1}{2}Id = 0_E$.

Pour $\vec{v} = \overrightarrow{OM(t)}$, alors $\sigma(\vec{v}) = \overrightarrow{V(t)}$ et $\sigma \circ \sigma(\vec{v}) = \overrightarrow{\Gamma(t)}$, ce qui donne :
 $\overrightarrow{\Gamma(t)} + \overrightarrow{V(t)} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OM(t)} = \vec{0}.$

3. De la question précédente, on peut déduire :

$$\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} x''(t) + x'(t) + \frac{1}{2}x(t) \\ y''(t) + y'(t) + \frac{1}{2}y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les deux fonctions vérifient donc l'équation différentielle E

$$f'' + f' + \frac{1}{2}f = 0$$

4. Résolution de E :

Cette équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 a pour polynôme caractéristique $P = X^2 + X + \frac{1}{2}$. Son discriminant Δ est -1 . P admet dans \mathbb{C} deux racines complexes conjuguées $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Les solutions de E forment un sous-espace vectoriel réel de dimension 2 engendré par (f_1, f_2) avec $f_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{1}{2}t$ et $f_2(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{1}{2}t$.

Calcul de $\overrightarrow{V(0)}$:

Comme $M(0) = M_0$, les composantes de $\overrightarrow{V(0)}$ sont celles de $\overrightarrow{OM_1} : \overrightarrow{V(0)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Calcul de $x(t)$ et $y(t)$:

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t} (\alpha \cos \frac{1}{2}t + \beta \sin \frac{1}{2}t)$$

$$f'(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left(\frac{-\alpha + \beta}{2} \cos \frac{1}{2}t + \frac{-\alpha - \beta}{2} \sin \frac{1}{2}t \right)$$

Les conditions initiales pour $x(t)$ donnent $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \frac{-\alpha + \beta}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$ c'est-à-dire $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.

Les conditions initiales pour $y(t)$ donnent $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \frac{-\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$ c'est-à-dire $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.

Les solutions sont donc :

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{1}{2}t$$

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{1}{2}t.$$

5. E peut s'écrire $f = -2f'' - 2f'$. Toute solution de l'équation différentielle vérifie :

$$\int_0^a f(t) dt = -2 \int_0^a f''(t) dt - 2 \int_0^a f'(t) dt = -2 [f'(t)]_0^a - 2 [f(t)]_0^a$$

$$\int_0^a f(t) dt = 2f'(0) + 2f(0) - 2f'(a) - 2f(a)$$

En particulier, $x(t)$ et $y(t)$ vérifient cette égalité.

La présence de $e^{-\frac{1}{2}t}$ avec un second facteur borné (combinaison linéaire de sin et cos) dans $f(t)$ et dans $f'(t)$ implique que $\lim_{a \rightarrow +\infty} f(a) = 0$ et $\lim_{a \rightarrow +\infty} f'(a) = 0$, ce

qui donne : $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a f(t) dt = 2f'(0) + 2f(0)$.

Les conditions initiales pour $x(t)$ et $x'(t)$ donnent :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a x(t) dt = 2x'(0) + 2x(0) = 1$$

Les conditions initiales pour $y(t)$ et $y'(t)$ donnent :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a y(t) dt = 2y'(0) + 2y(0) = 1$$

En conclusion :

$$\int_0^{+\infty} \cos \left(\frac{1}{2}t \right) e^{-\frac{1}{2}t} dt = \int_0^{+\infty} \sin \left(\frac{1}{2}t \right) e^{-\frac{1}{2}t} dt = 1$$