Corrigé du baccalauréat C Bordeaux juin 1972

Exercice 1

1. Mettons l'équation sous forme canonique, puis factorisons-la.
$x^2 + x + \dot{6} = \dot{0}$
$\iff x^2 + \dot{14}x + \dot{6} = \dot{0}$ (puisque $\dot{13}x = \dot{0}$)
$\iff (x + \dot{7})^2 - \dot{49} + \dot{6} = \dot{0}$
$\iff (x + \dot{7})^2 - \dot{4} = \dot{0}$ (puisque $-\dot{49} + \dot{6} = -\dot{4}$)
$\iff (x + \dot{7})^2 - \dot{2}^2 = \dot{0}$
$\iff (x + \dot{5})(x + \dot{9}) = \dot{0}$
$\iff x + \dot{5} = \dot{0}$ ou $x + \dot{9} = \dot{0}$ (puisque 13 étant premier, $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ est un corps)
$\iff x = \dot{8}$ ou $x = \dot{4}$.
L'ensemble des solutions est donc $\{\dot{4}, \dot{8}\}$.

2. La première équation peut s'écrire $\dot{2}(x - \dot{2}y) = \dot{2}$.
La table de Pythagore de la multiplication dans l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est :

$\times$	0	**1**	2	3	**4**	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	$\boxed{2}$	4	0	$\boxed{2}$	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

La première équation est donc équivalente à $x - \dot{2}y = \dot{1}$ ou $x - \dot{2}y = \dot{4}$ ce qui donne 2 systèmes : $\begin{cases} x - \dot{2}y = \dot{1} \\ x + \dot{5}y = \dot{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - \dot{2}y = \dot{4} \\ x + \dot{5}y = \dot{2} \end{cases}$.

Résolution du premier système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - \dot{2}y & = & \dot{1} \\ x + \dot{5}y & = & \dot{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x - \dot{2}y & = & \dot{1} \\ \dot{7}y & = & \dot{1} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x - \dot{2}y & = & \dot{1} \\ y & = & \dot{1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dot{3} \\ y & = & \dot{1} \end{array}\right..$$

Résolution du second système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - \dot{2}y & = & \dot{4} \\ x + \dot{5}y & = & \dot{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x - \dot{2}y & = & \dot{4} \\ \dot{7}y & = & -\dot{2} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x - \dot{2}y & = & \dot{4} \\ y & = & \dot{4} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dot{0} \\ y & = & \dot{4} \end{array}\right..$$

L'ensemble des solutions est donc $\{(\dot{3}\ ;\ \dot{1}), (\dot{0}\ ;\ \dot{4})\}$.

Exercice 2

On a : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ puisque $(ABCD)$ est un carré.
Comme O est le milieu de $[AD]$, $\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{AO}$ et donc $\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{AO}$.
Comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$, on a $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = 2\,\overrightarrow{AO}$, c'est-à-dire :
$2\,\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$.

La somme des coefficients étant non nulle, on peut conclure :

O est le barycentre des points A, B et C respectivement affectés des coefficients 2, -1 et 1.

En particulier, pour un point M quelconque :

$2\overrightarrow{MO} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ (relation barycentrique).

Cherchons l'ensemble des points M.

$2\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MC} = 0$

$\iff \overrightarrow{MD}\cdot(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$

$\iff \overrightarrow{MD}\cdot 2\overrightarrow{MO} = 0$ (relation barycentrique)

$\iff \overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MO} = 0.$

L'ensemble des points M est donc le cercle de diamètre $[OD]$.

PROBLÈME

Partie A

1. Intégration par parties. Posons $u'(t) = \mathrm{e}^t$ et $v(t) = t$.

On a : $u(t) = \mathrm{e}^t$ et $v'(t) = 1$.

$\displaystyle\int_0^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \left[t\mathrm{e}^t\right]_0^x - \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t =$
$\displaystyle x\mathrm{e}^x - \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$

On a donc : $\displaystyle\int_0^x t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^x - \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$

Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_0^x (x-t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$

$\displaystyle\int_0^x (x-t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = x\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t - \int_0^x t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t =$
$\displaystyle x\left[\mathrm{e}^t\right]_0^x - (x\mathrm{e}^x - \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t) =$
$x(\mathrm{e}^x - 1) - x\mathrm{e}^x + \left[\mathrm{e}^t\right]_0^x = x(\mathrm{e}^x - 1) - x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - 1 =$
$-x + \mathrm{e}^x - 1.$

On en déduit que $\displaystyle\mathrm{e}^x = 1 + x + \int_0^x (x-t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$

2. Intégrons par parties : posons $u'(t) = \dfrac{(x-t)^n}{n\,!}$ et $v(t) = \mathrm{e}^t$.

On a $u(t) = -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{n+1\,!}$ et $v'(t) = \mathrm{e}^t$.

$\displaystyle\int_0^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t =$
$\displaystyle\left[-\tfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^t\right]_0^x - \int_0^x -\left(\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$

3. Démontrons par récurrence.

La réponse à la question A 1. montre que la propriété est vraie au rang 1. On remarque qu'elle est également trivialement vraie au rang 0.

Supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$:

$\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n\,!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$

Or d'après la réponse à la question A 2. $\displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n\,!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$

On a alors $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, ce qui montre que la propriété est vraie au rang $n+1$.

D'après l'axiome de récurrence, la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En utilisant la notation de la partie B, on a : $\mathrm{e}^x = P_n(x) + \displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n\,!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$

Partie B

On pose

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$
$$I_n = \int_0^1 (1-t)^n\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$
$$\text{et } J_n = \int_{-1}^0 (1+t)^n\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

1. **a.** Montrons que $n\,!H = n\,!\,[aP_n(1) + b + cP_n(-1)] + aI_n + (-1)^{n+1}cJ_n$.

On a : $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1 = P_n(1) + \displaystyle\int_0^1 \dfrac{(1-t)^n}{n\,!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = P_n(1) + \dfrac{1}{n\,!}I_n.$

De même : $\mathrm{e}^{-1} = P_n(-1) + \displaystyle\int_0^{-1} \dfrac{(-1-t)^n}{n\,!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = P_n(-1) + \dfrac{(-1)^n}{n\,!}\displaystyle\int_0^{-1} (1+t)^n\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = P_n(-1) + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n\,!}\displaystyle\int_{-1}^0 (1+t)^n\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = P_n(-1) + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n\,!}J_n.$

On a donc : $H = a\left(P_n(1) + \frac{1}{n\,!}I_n\right) + b + c\left[P_n(-1) + \frac{(-1)^{n+1}}{n\,!}J_n\right].$

Ce qui donne : $n\,!H = n\,!\,[aP_n(1) + b + cP_n(-1)] + aI_n + (-1)^{n+1}cJ_n.$

b. Positivité de I_n :

Sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, $1 - t \geqslant 0$ d'où : $\dfrac{(1-t)^n}{n\,!}\mathrm{e}^t \geqslant 0.$

Par positivité de l'intégrale sur $[0\ ;\ 1]$, on a : $I_n \geqslant 0$.

Majoration de I_n :

Sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, la fonction exponentielle étant croissante, on a : $\mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^1$ d'où $(1-t)^n\mathrm{e}^t \leqslant (1-t)^n\mathrm{e}$.

On en déduit : $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (1-t)^n\mathrm{e}\,\mathrm{d}t.$

Or : $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\mathrm{e}\,\mathrm{d}t = \left[-\dfrac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\mathrm{e}\right]_0^1 = \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}.$

On obtient donc la majoration : $I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.

Positivité de J_n :

Sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$, $1 + t \geqslant 0$ d'où : $\frac{(1+t)^n}{n\,!}\mathrm{e}^t \geqslant 0.$

Par positivité de l'intégrale sur $[-1\ ;\ 0]$, on a : $J_n \geqslant 0$.

Majoration de J_n :

Sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$, la fonction exponentielle étant croissante, on a : $\mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^0$ d'où $(1+t)^n\mathrm{e}^t \leqslant (1+t)^n$.

On en déduit : $\displaystyle\int_{-1}^{0}(1+t)^n \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{-1}^{0}(1+t)^n\,\mathrm{d}t$.

Or : $\displaystyle\int_{-1}^{0}(1+t)^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(1+t)^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{n+1}$.

On obtient donc la majoration : $J_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Par théorème d'encadrement des suites, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h(n) = 0$.

c. Montrons que Q_n est un entier relatif.

$\displaystyle n\,!P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{n\,!}{k\,!}x^k$.

Chaque terme $\dfrac{n\,!}{k\,!}$ avec $k \leqslant n$ est entier naturel.

$n\,!P_n(1)$ et $n\,!P_n(-1)$ sont donc des entiers relatifs.

Comme a, b et c sont des entiers relatif, on peut conclure que Q_n est un entier relatif.

Montrons la relation de congruence.

Dans $n\,!P_n(\pm 1)$, chaque terme $\dfrac{n\,!}{k\,!}$ (avec $k < n$) est divisible par n. Il ne reste donc par congruence que le terme d'exposant n.

On a donc : $n\,!P_n(1) \equiv 1 \pmod{n}$ et $n\,!P_n(-1) \equiv (-1)^n \pmod{n}$. On a également $n\,!b \equiv 0 \pmod{n}$.

En conclusion : $Q_n \equiv a + (-1)^n c \pmod{n}$.

2. Supposons qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $Q_n = 0$.

Pour toutes ces valeurs de n, la relation de congruence donne :

$a + (-1)^n c \equiv 0 \pmod{n}$.

$a + (-1)^n c$ a donc une infinité de diviseurs.

Cela qui implique $a + (-1)^n c = 0$ c'est-à-dire $|a| = |c|$.

Ainsi, si $|a| \neq |c|$, il existe un rang n_0 à partir duquel $Q_n \neq 0$ pour $n > n_0$.

Par conséquent, il existe une infinité d'entiers n pour lesquels $Q_n \neq 0$.

3. **a.** On a : $n\,!H = Q_n + h(n)$.

Si $H = 0$ alors $Q_n + h(n) = 0$. Comme Q_n est un entier relatif et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h(n) = 0$, il existe un rang N à partir duquel $Q_n = 0$ pour $n > N$.

En prenant deux indices consécutifs n et $n+1$ supérieurs à N, la relation de congruence B.1.c donne $a + c = 0$ et $a - c = 0$ c'est-à-dire $a = c = 0$.

Il ne reste que $H = b$ et donc $b = 0$.

Ainsi : $H = 0 \iff a = b = c = 0$.

b. Supposons que e soit racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels. Cette équation peut se réécrire comme une équation du second degré à coefficients entiers relatifs en multipliant simplement par le dénominateur commun des trois coefficients rationnels. Notons a, b et c ces coefficients entiers relatifs, avec $a \neq 0$. L'équation est donc $a\mathrm{e}^2 + b\mathrm{e} + c = 0$ c'est à dire $\mathrm{e}H = 0$ ce qui équivaut à $H = 0$. Or d'après la question B.3.a, $H = 0$ n'est possible que si $a = b = c = 0$.

e ne peut donc pas être racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels.