∽ Corrigé du baccalauréat S Nouvelle–Calédonie décembre 2001 ∾

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie I

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :

$$(-1\ ;\ 0\ ;\ 2),\quad (3\ ;\ 2\ ;\ -4),\quad (1\ ;\ -4\ ;\ 2),\quad (5\ ;\ -2\ ;\ 4).$$

On considère les points I, J et K définis par : I est le milieu du segment [AB], K est le milieu du segment [CD] et $\overrightarrow{\text{BJ}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{BC}}$.

1. I(1 ; 1 ; −1), K(3 ; −3 ; 3) ; $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}-2\\-6\\6\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{\text{BJ}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$, d'où $\text{J}\left(\frac{5}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ -\frac{5}{2}\right)$.

2. **a.** On a $\overrightarrow{\text{IJ}}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{IK}}\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}$.

Il n'existe pas de réel λ tel que $\overrightarrow{\text{IJ}} = \lambda\overrightarrow{\text{IK}}$: les vecteurs $\overrightarrow{\text{IJ}}$ et $\overrightarrow{\text{IK}}$ ne sont pas colinéaires donc les points I, J et K ne sont pas alignés.

b. D'après la question précédente les points I, J et K déterminent un plan (IJK) et l'on sait que :

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{IJK}) \iff ax + by + cz + d = 0,$$

avec a, b, c et d réels. Ainsi
$\text{I}(1\ ;\ 1\ ;\ -1) \in (\text{IJK}) \iff a + b - c + d = 0$;
$\text{J}\left(\frac{5}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ -\frac{5}{2}\right) \in (\text{IJK}) \iff \frac{5}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{5}{2}c + d = 0$;
$\text{K}(3\ ;\ -3\ ;\ 3) \in (\text{IJK}) \iff 3a - 3b + +c + d = 0$.
Les réels a, b, c et d vérifient donc le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a + b - c + d &=& 0\\ \frac{5}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{5}{2}c + d &=& 0\\ 3a - 3b + 3c + d &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 3a + 3b - 3c + 3d &=& 0\\ \frac{5}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{5}{2}c + d &=& 0\\ 3a - 3b + 3c + d &=& 0\end{array}\right.$$

par somme des lignes (1) et (3) on obtient $6a + 4d = 0 \iff a = -\dfrac{2}{3}d$.
Le système devient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} b - c + \frac{1}{3}d &=& 0\\ b - 5c - \frac{4}{3}d &=& 0\\ -3b + 3c - d &=& 0\end{array}\right. \text{ d'où par différence des lignes (1) et (2)}$$

$4c = -\frac{5}{3}d \iff c = -\frac{5}{12}d$; enfin la ligne (3) donne

$3b = 3c - d = -\frac{5}{4}d - d = -\frac{9}{4}d$, d'où $b = -\frac{9}{12}d$.
Finalement : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \text{(IJK)} \iff -\frac{2}{3}dx - \frac{9}{12}dy - \frac{5}{12}dz + d = 0$ et finalement en multipliant par -12 et en simplifiant par d :

$$8x + 9y + 5z - 12 = 0.$$

c. On a $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \text{(AD)} \iff \overrightarrow{\text{A}M} : t\overrightarrow{\text{AD}},\ t \in \mathbb{R}$.
Avec $\overrightarrow{\text{A}M}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AD}}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ l'équation ci-dessus se traduit par le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+1 & = & 6t \\ y & = & -2t \quad t \in \mathbb{R}. \\ z-2 & = & 2t \end{array}\right.$$

Le plan (IJK) et la droite (AD) sont sécants en un point L si les coordonnées de ce point $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifient le système :
$\left\{\begin{array}{lcl} x+1 & = & 6t \\ y & = & -2t \\ z-2 & = & 2t \\ 8z+9y+5z-12 & = & 0 \end{array}\right.$; en remplaçant dans la dernière équation x, y et z par leurs valeurs en fonction de t on obtient :
$8(-1+6t) + 9 \times (-2t) + 5(2+2t) = 0 \iff -8 + 48t - 18t + 10 + 10t - 12 = 0 \iff 30t = 10 \iff t = \dfrac{1}{3}$.

Avec cette valeur de t on obtient $\text{L}\left(1\,;\,-\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{8}{3}\right)$.

d. On a $\overrightarrow{\text{AL}}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AD}}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, d'où $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{AD}}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Partie II

Plus généralement, dans l'espace E, on considère un tétraèdre ABCD ainsi que les points I, J, K et L définis par I est le milieu du segment [AB], K est le milieu du segment [CD].

$$\overrightarrow{\text{AL}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{AD}} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\text{BJ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{BC}}$$

Soit G le barycentre de (A, 3), (B, 3), (C, 1), D, 1).

1. Si G_1 est le barycentre de {(A, 3), (D, 1)}, on sait que $3\overrightarrow{\text{G}_1\text{A}} + 1\overrightarrow{\text{G}_1\text{D}} = 0 \iff 3\overrightarrow{\text{G}_1\text{A}} + \overrightarrow{\text{G}_1\text{A}} + \overrightarrow{\text{AD}} = \vec{0} \iff \overrightarrow{\text{AG}_2} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{AD}}$. Sur la droite (AB) G_1 est le point d'abscisse $\dfrac{1}{4}$ pour le repère (A, B) : c'est le point L.
Si G_2 est le barycentre de {(B, 3), (C, 1)}, on sait que $3\overrightarrow{\text{G}_2\text{B}} + 1\overrightarrow{\text{G}_2\text{C}} = 0 \iff 3\overrightarrow{\text{G}_1\text{B}} + \overrightarrow{\text{G}_1\text{B}} + \overrightarrow{\text{BC}} = \vec{0} \iff \overrightarrow{\text{BG}_2} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{BC}}$. Sur la droite (CD) G_2 est le point d'abscisse $\dfrac{1}{4}$ pour le repère (C, D) : c'est le point J.

2. D'après la propriété d'associativité du barycentre on peut trouver le barycentre G de deux façons :

- On calcule d'abord le barycentre L de A et D d'une part puis le barycentre J de B et de C de (I, 4) et (J, 4) : c'est le milieu de [LJ]

  Le barycentre G des quatre points est le barycentre de I et J pondérés par 4 : G est donc le milieu de [IJ].
- On calcule d'abord le barycentre de A et B pondérés par 3 : c'est le milieu I pondéré par 4 d'une part puis le barycentre de C et de D pondérés par 1 : c'est le point K.

  On calcule enfin le barycentre J de B et de C de (I, 4) et (K, 4) : c'est le milieu de [IK].

  Le barycentre G étant unique on a démontré que le milieu de [LJ] est le milieu de [IK], autrement dit (IJKL) est un parallélogramme : les points I, J, K et L sont coplnaires.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

$$z' = \frac{\mathrm{i}z-2}{z+\mathrm{i}}.$$

1. Soit $z = a\mathrm{i}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $a \neq -1$, alors $z' = \dfrac{\mathrm{i}a\mathrm{i}-2}{a\mathrm{i}+\mathrm{i}} = \dfrac{-a-2}{\mathrm{i}(a+1)} = \dfrac{a+2}{(a+1)}\mathrm{i}$.

   z' est un imaginaire pur.
2. z est invariant par f si et seulement si $z' = z \iff \dfrac{\mathrm{i}z-2}{z+\mathrm{i}} = z \iff \mathrm{i}z-2 = z(z+\mathrm{i}) \iff$ $z^2 = -2$: cette équation a deux solutions dans $\mathbb{C}$: $-\sqrt{2}\mathrm{i}$ et $\sqrt{2}\mathrm{i}$ qui sont des imaginaires purs.
3. $\left|z'-\mathrm{i}\right| \times |z+\mathrm{i}| = \left|\dfrac{\mathrm{i}z-2}{z+\mathrm{i}} - \mathrm{i}\right| \times |z+\mathrm{i}| = \left|\dfrac{\mathrm{i}z-2-\mathrm{i}z+1}{z+\mathrm{i}}\right| \times |z+\mathrm{i}| = \left|\dfrac{-1}{z+\mathrm{i}}\right| \times |z+\mathrm{i}| = 1$ car $|-1| = 1$.

   Si M d'affixe z décrit le cercle de centre A et de rayon 2, on a $|z-(-\mathrm{i})| = 2$ soit $|z+\mathrm{i}| = 2$ et d'après le résultat précédent son image M' d'affixe z' est telle que $|z'-\mathrm{i}| = \dfrac{1}{2}$ ce qui montre que le point M' appartient au cercle centré au point d'affixe i et de rayon $\dfrac{1}{2}$.
4. **a.** $(z+\mathrm{i})^2 = z^2 + 2\mathrm{i}z - 1$;

   $z^2 + 2\mathrm{i}z - 2 = z^2 + 2\mathrm{i}z - 1 - 1 = (z+\mathrm{i})^2 - 1 = (z+\mathrm{i}+1)(z+\mathrm{i}-1)$

   b. M' est le symétrique de M par rapport à O si $z' = -z \iff \dfrac{\mathrm{i}z-2}{z+\mathrm{i}} = -z \iff$

   $\mathrm{i}z-2 = -z(z+\mathrm{i}) \iff \mathrm{i}z-2 = -z^2 - \mathrm{i}z \iff z^2 + 2\mathrm{i}z - 2 = 0$, soit d'après la factorisation précédente :

   $(z+\mathrm{i}+1)(z+\mathrm{i}-1) = 0 \iff \left\{\begin{array}{ll} z+\mathrm{i}+1 & = 0 \\ z+\mathrm{i}-1 & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} z & = & -\mathrm{i}-1 \\ z & = & -\mathrm{i}+1 \end{array}\right.$

   Les points solutions sont les points de coordonnées $(-1\ ;\ -1)$ et $(1\ ;\ -1)$.

5. $\left(\text{On pourra remarquer que } z' = \dfrac{\mathrm{i}\left(z - z_{\mathrm{B}}\right)}{z - z_{\mathrm{A}}}\right)$.

On a $z' = \dfrac{\mathrm{i}z - 2}{z + \mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}z + \mathrm{i} \times 2\mathrm{i}}{z - (-\mathrm{i})} = \dfrac{\mathrm{i}(z + 2\mathrm{i})}{z - (-\mathrm{i})} = \dfrac{\mathrm{i}\left(z - z_{\mathrm{B}}\right)}{z - z_{\mathrm{A}}}$.

On a donc $|z'| = 1 \iff \left|\dfrac{\mathrm{i}\left(z - z_{\mathrm{B}}\right)}{z - z_{\mathrm{A}}}\right| = 1 \iff \dfrac{\left|z - z_{\mathrm{B}}\right|}{\left|z - z_{\mathrm{A}}\right|} = 1 \iff \left|z - z_{\mathrm{B}}\right| = \left|z - z_{\mathrm{A}}\right| \iff$ $\mathrm{B}M = \mathrm{A}M$: les points solutions sont les points appartenant à la médiatrice du segment [AB].

EXERCICE 2 — 5 points

Enseignement de spécialité

Partie I

Soit x un nombre réel.

1. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $x^4 + 4 = x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 = \left(x^4 + 4 + 4x^2\right) - 4x^2 = \left(x^2 + 2\right)^2 - 4x^2$.

2. $x^4 + 4 = \left(x^2 + 2\right)^2 - (2x)^2 = \left(x^2 + 2 + 2x\right)\left(x^2 + 2 - 2x\right)\left(x^2 + 2 - 2x\right) = \left(x^2 + 2x + 2\right)\left(x^2 - 2x + 2\right)$ (produit de deux trinômes).

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD.

1. D'après la partie I, avec $n \in \mathbb{Z}$, $n^4 + 4 = \left(n^2 + 2n + 2\right)\left(n^2 - 2n + 2\right)$: cet entier est donc le produit de deux entiers :

- Ces entiers ne peuvent être 1 et $n^4 + 4$, car on aurait : $n^2 - 2n + 2 = 1 \iff n^2 - 2n + 1 = 0 \iff (n - 1)^2 = 0 \iff n = 1$ impossible car $n \geqslant 2$;
- ces entiers ne peuvent être $n^4 + 4$ et 1, car alors $n^2 + 2n + 2 = 1 \iff n^2 + 2n + 1 = 0 \iff (n + 1)^2 = 0 \iff n = -1$: impossible car $n \geqslant 2$.

Conclusion $n^4 + 4$ est le produit de deux entiers distincts aucun d'eux n'étant égal à 1 : $n^4 + 4$ n'est pas premier.

2. Soit d un diviseur de A qui divise n et aussi donc n^2 et aussi $A - n^2 - 2n = 2$: donc d divise 2.

3. Si d est un diviseur de A et de B il divise aussi la différence $B - A = n^2 + 2n + 2 - \left(n^2 - 2n + 2\right) = 4n$

4. Dans cette question on suppose que n est impair.

a. • Si $n = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$, alors $A = (2p + 1)^2 - 2(2p + 1) + 2 = 4p^2 + 4p + 1 - 4p - 2 + 2 = 4p^2 + 1$ ce qui montre que A est impair ;

• Si $n = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$, alors $B = (2p + 1)^2 + 2(2p + 1) + 2 = 4p^2 + 4p + 1 + 4p + 2 + 2 = 4p^2 + 8p + 4 + 1 + 1 = 2\left(2p^2 + 4p + 1\right) + 1$ ce qui montre que B est impair.

Conséquence : d ne peut être pair (un pair ne peut pas diviser un impair), donc d est impair.

b. Si d est un diviseur commun à A et B il divise aussi la différence $B - A = 4n$. . Comme d divise $4n$ et qu'il est premier avec 4, il divise donc n.

c. En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.

5. On suppose maintenant que n est pair.

a. Montrer que 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$.

b. Montrer que d est de la forme $d = 2p$, où p est impair.

c. Montrer que p divise n. En déduire que $d = 2$. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question **4**)

PROBLÈME **5 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \left(x^2 + 4x + 3\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$; l'unité graphique est 2 cm.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \left(x^2 + 2x - 1\right)\mathrm{e}^{-x} + 1.$$

1. • |imite en $+\infty$:

On a $g(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x} + 2\,\mathrm{e}^{-x}c - 1\,\mathrm{e}^{-x}$; or on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x} = 0$, donc par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

• |imite en $-\infty$: On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 + 2x - 1 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, donc par produit de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

2. g produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur cet intervalle :

$g'(x) = (2x+2)\,\mathrm{e}^{-x} - \left(x^2 + 2x - 1\right)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(-x^2 + 3\right)$.

Comme quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui du trinôme $3 - x^2 = \left(\sqrt{3} + x\right)\left(\sqrt{3} - x\right)$.

3. D'après la question précédente $g'(x)$ est négative sauf sur l'intervalle $]-\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3}[$ où $g'(x) > 0$.

La fonction g est donc décroissante sur $]-\infty\ ;\ -\sqrt{3}[$ de plus l'infini à $g(-\sqrt{3}) = (2-2\sqrt{3})\,\mathrm{e}^{\sqrt{3}}+1 \approx -7,28$, puis croissante de $g(-\sqrt{3})$ à $g(\sqrt{3}) = (2+2\sqrt{3})\,\mathrm{e}^{-\sqrt{3}} + 1 \approx 7,97$, et enfin décroissante de $g(\sqrt{3})$ à 1.

4. **a.** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur cet intervalle :

• Sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -\sqrt{3}[$, la fonction g est strictement décroissante de moins l'infini à environ -7 : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un réel unique $\alpha \in]-\infty\ ;\ -\sqrt{3}[$, tel que $f(\alpha) = 0$;

• Sur l'intervalle $]-\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3}[$, la fonction g est strictement croissante de moins sept à environ huit : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un réel unique $\beta \in]-\sqrt{3}\ ;\ -\sqrt{3}[$, tel que $f(\beta) = 0$.

• On a $g(0) = 0+0-1\,\text{e}^{\,0}+1 = -1+1 = 0$, donc $\beta = 0$

b. La calculatrice donne $g(-2,4) \approx 0,56$ et $g(-2,3) \approx -2,09$ donc $-2,4 < \alpha < -2,3$.

5. D'après les résultats de la question 4. et le tableau de variations, on en déduit que :

• $g(x) > 0$ sur $]-\infty\ ;\ \alpha[$;

• $g(x) < 0$ sur $]\alpha\ ;\ 0[$;

• $g(x) > 0$ sur $]0\ ;\ +-\infty[$

Partie B - Étude de la fonction *f*

1. • Limite en $-\infty$:

$f(x) = x - \left(x^2+4x+3\right)\text{e}^{-x} = x^2\left[\dfrac{1}{x} - 1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right]\text{e}^{\,-x} = x^2\left[-1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right]\text{e}^{\,-x}$.

On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^2} = -1$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{e}^{\,-x} = +\infty$ donc par produit de limites

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left[-1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right]\text{e}^{\,-x} = -\infty$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2v = +\infty$, par produit de limites :

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

• Limite en $+\infty$:

$f(x) = x - x^2\,\text{e}^{\,-x} - 4x\,\text{e}^{\,-x} - 3\,\text{e}^{\,-x}$, or on sait que quel soit $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^a\,\text{e}^{\,-x} = 0$, comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, on a finalement :

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. **a.** f est une somme de produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc sur cet intervalle :

$f'(x) = 1 - (2x+4)\,\text{e}^{\,-x} + \left(x^2+4x+3\right)\text{e}^{\,-x} =$

$1 + \text{e}^{\,-x}\left(x^2+4x+3-2x-4\right)1 + \text{e}^{\,-x}\left(x^2+2x-1\right) = g(x)$

b. Le signe de $g(x)$ a été donné à la fin de la partie A; on en déduit les trois variations de la fonction f :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\approx 6,8$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

3. On a $f(x) - x = -\left(x^2+4x+3\right)\text{e}^{\,-x}$.

Or on a démontré à la question 1. que ${}_{x\to+\infty}\left(x^2+4x+3\right)\text{e}^{\,-x} =$; il en est de même de son opposé donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}[f(x) - x] = 0$, ce qui montre le résultat demandé.

4. **a.** Les points communs à (D) et à la courbe $(\mathscr{C})$ ont des abscisses telles que $f(x) = x \iff -\left(x^2+4x+3\right)\text{e}^{\,-x} = 0 \iff x^2+4x+3 = 0$ car $\text{e}^{\,-x} \neq 0$.

or $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$: les deux racines du trinôme sont -3 et -1 : si A est le point d'abscisse -3, son ordonnée est $f(-3)=-3$: B est le point d'abscisse et d'ordonné -1.

A$(-3\,;\,3)$ et B$(-1\,;\,-1)$.

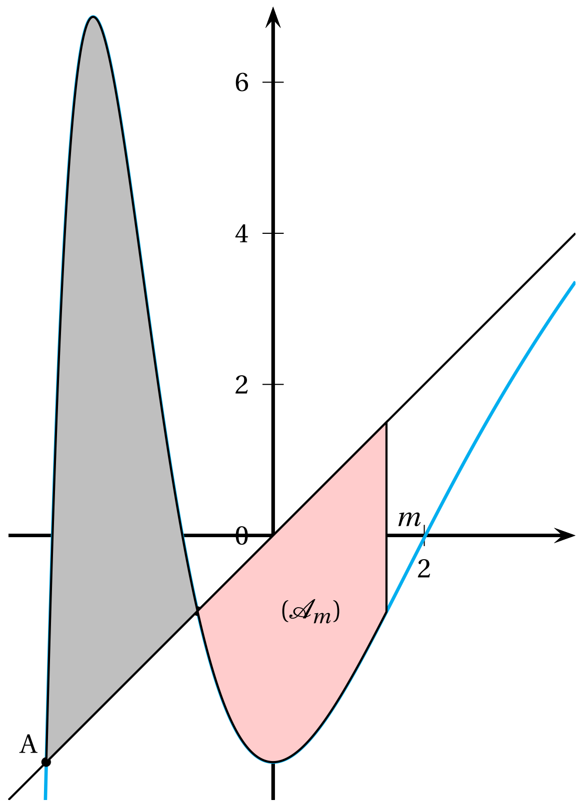
b. Soit Δ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Delta(x)=x-f(x)=\left(x^2+4x+3\right)\text{e}^{-x}$.

Comme $\text{e}^{-x}>0$, le signe de $\Delta(x)$ est celui du trinôme x^2+4x+3.

On sait que celui-ci est positif sauf entres ses racines -3 et -1.

Conclusion : (D) est au dessus de $(\mathscr{C})$, sauf sur l'intervalle $]-3\,;\,-1[$.

5.



Partie C - Calculs d'aire

1. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\text{e}^{-x}.$$

Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction H soit une primitive de la fonction h définie par :

$$h(x)=\left(x^2+4x+3\right)\text{e}^{-x}.$$

H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$ si :

$H'(x)=h(x)\iff(2ax+b)\text{e}^{-x}-\left(ax^2+bx+c\right)\text{e}^{-x}=\left(x^2+4x+3\right)\text{e}^{-x}\iff\left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right]\text{e}^{-x}=\left(x^2+4x+3\right)\text{e}^{-x}\iff-ax^2+(2a-b)x+b-c=x^2+4x+3.$

On en déduit aussitôt par identification :
$a = -1$ puis $2a - b = 4 \iff 2a - b = 4 \iff -2 - b = 4 \iff b = -6$, et enfin $b - c = 3 \iff -6 - c = 3 \iff c = -9$.
$F(x) = \left(-x^2 - 6x - 9\right) \mathrm{e}^{-x}$.

2. On a vu que la courbe $(\mathscr{C})$ est au dessus de la droite (D) pour $x \in [-3\ ;\ -1]$. L'aire à calculer $(\mathscr{A})$ est donc égale à :
$(\mathscr{A}) = \displaystyle\int_{-3}^{-1} [f(x) - x]\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{-1} \left[-\left(x^2 + 4x + 3\right) \mathrm{e}^{-x}\right] \mathrm{d}x = \int_{-3}^{-1} -h(x)]\,\mathrm{d}x = [H(x)]_{-3}^{-1}$;
$(\mathscr{A}) = 4\,\mathrm{e} - 0 = 4\,\mathrm{e}$. (en unités d'aire).

3. On sait que si $x \geqslant -1$, (D) est au dessus de la courbe $(\mathscr{C})$

a. On a donc $(\mathscr{A}_m) = \displaystyle\int_{-1}^{m} [x - f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{m} h(x)\,\mathrm{d}x = [H(x)]_{-1}^{m} =$
$-\left(m^2 + 6m + 9\right) \mathrm{e}^{-m} + 4\,\mathrm{e}$.

b. On sait que $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} -\left(m^2 + 6m + 9\right) \mathrm{e}^{-m} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} (\mathscr{A}_m) = 4\,\mathrm{e}$.