Corrigé du Concours contrôleur des douanes session 2024

Branche du contrôle des opérations commerciales et de l'administration générale

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,-2[\cup]-2\,;\,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x+2}$.

1. On détermine les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   - La fonction f est une fonction rationnelle donc sa limite en l'infini est la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x^2+x+1}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$$
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+x+1}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

   - Limite à gauche de -2

   $$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} x^3+x^2+x+1=-5<0\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} x+2=0\\ x+2<0\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=+\infty$$

   - Limite à droite de -2

   $$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} x^3+x^2+x+1=-5<0\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} x+2=0\\ x+2>0\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=-\infty$$

2. $$f'(x)=\frac{\left(3x^2+2x+1\right)\times(x+2)-\left(x^3+x^2+x+1\right)\times 1}{(x+2)^2}$$
   $$=\frac{3x^3+2x^2+x+6x^2+4x+2-x^3-x^2-x-1}{(x+2)^2}=\frac{2x^3+7x^2+4x+1}{(x+2)^2}$$

3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=2x^3+7x^2+4x+1$.

   a. $g'(x)=6x^2+14x+4$

   On détermine le signe du trinôme $6x^2+14x+4$.

   $\Delta=14^2-4\times6\times4=100=10^2$

   Le trinôme admet deux racines :

   $x'=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-14-10}{2\times6}=-2$ et $x''=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-14+10}{2\times6}=\dfrac{-4}{12}=-\dfrac{1}{3}$.

   D'où le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	

   $$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}2x^3+7x^2+4x+1=\lim_{x\to-\infty}2x^3=-\infty$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3+7x^2+4x+1 = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$

$g(-2) = 2\times(-2)^3+7\times(-2)^2+4\times(-2)+1 = -16+28-8+1 = 5$

$g\left(-\dfrac13\right) = 2\times\left(-\dfrac13\right)^3+7\times\left(-\dfrac13\right)^2+4\times\left(-\dfrac13\right)+1 = -\dfrac{2}{27}+\dfrac79-\dfrac43+1 = \dfrac{10}{27}$

On établit le tableau des variations de g sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		$-\frac13$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$\frac{10}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

b. La fonction g est une fonction polynôme donc elle est continue sur $\mathbb{R}$. De plus elle est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,-2[$. Enfin $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) < 0$ et $g(-2) = 5 > 0$.

x	$-\infty$		α		-2
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	5

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on peut dire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur $]-\infty\,;\,-2[$. On l'appelle α et on admettra que $\alpha = -2{,}86$.

c. D'après son tableau de variations, on peut dire que la fonction g admet sur l'intervalle $[-2\,;\,+\infty[$ un minimum égal à $\frac{10}{27}$, donc strictement positif.

On en déduit que l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[-2\,;\,+\infty[$.

4. $f'(x) = \dfrac{2x^3+7x^2+4x+1}{(x+2)^2} = \dfrac{g(x)}{(x+2)^2}$

D'après les questions précédentes, on peut déterminer le signe de $g(x)$, puis le signe de $f'(x)$, puis les variations de la fonction f.

x	$-\infty$		α		-2		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x+2)^2$		$+$	|	$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(\alpha) \approx 19{,}85$

Exercice 2

Une entreprise de location de voitures sur circuit propose à ses clients deux types de voitures : voiture à moteur classique ou voiture électrique. Par ailleurs, un client peut prendre l'option PILOTE. Dans ce cas, la voiture, qu'elle soit électrique ou à moteur classique, est louée avec un pilote.

On sait que :

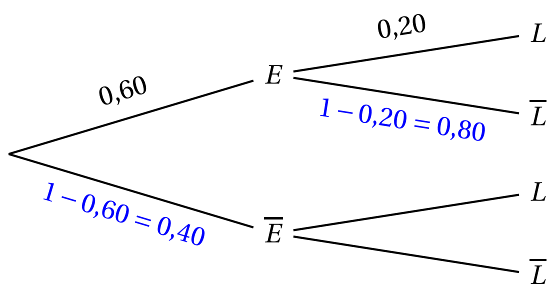
- 60 % des clients choisissent une voiture électrique ; parmi eux, 20 % prennent l'option PILOTE ;
- 42 % des clients prennent l'option PILOTE.

On choisit au hasard un client et on considère les évènements :

- E : le client choisit une voiture électrique ;
- L : le client prend l'option PILOTE.

Partie A :

1. On traduit la situation par un arbre pondéré.



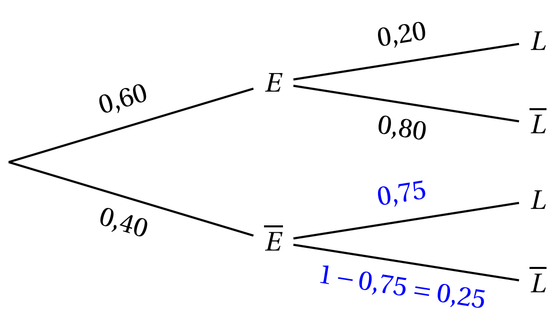
2. La probabilité que le client choisisse une voiture électrique et qu'il ne prenne pas l'option PILOTE est : $P\left(E\cap\overline{L}\right)=P(E)\times P_E\left(\overline{L}\right)=0,60\times 0,80=0,48$.
3. La probabilité que le client choisisse une voiture à moteur classique et qu'il prenne l'option PILOTE est : $P\left(\overline{E}\cap L\right)$.

   On sait que 42 % des clients prennent l'option PILOTE, donc $P(L)=0,42$.

   D'après la formule des probabilités totales : $P(L)=P(E\cap L)+P\left(\overline{E}\cap L\right)$.

   $P(E\cap L)=0,6\times 0,2=0,12$ donc $0,42=0,12+P\left(\overline{E}\cap L\right)$ donc $P\left(\overline{E}\cap L\right)=0,30$.
4. $P_{\overline{E}}(L)=\dfrac{P\left(\overline{E}\cap L\right)}{P\left(\overline{E}\right)}=\dfrac{0,30}{0,40}=0,75$

   On peut compléter l'arbre pondéré.



5. Un client a pris l'option PILOTE.

   La probabilité qu'il ait choisi une voiture électrique est :

   $P_L(E) = \dfrac{P(E \cap L)}{P(L)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}42} = \dfrac{2}{7} \approx 0{,}29$.

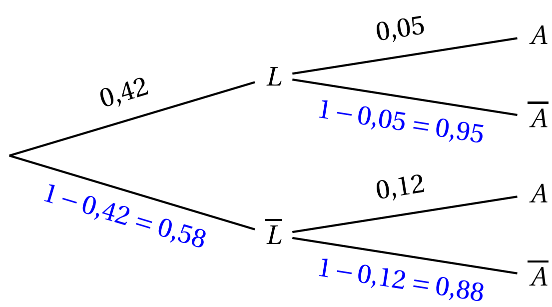
Partie B :

Les arrondis se feront à 10^{-4} près.

Lorsqu'un client ne prend pas l'option PILOTE, la probabilité que sa voiture subisse un accident est égale à 0,12. Cette probabilité est de 0,005 si le client prend l'option PILOTE.

On considère un client. On note A l'évènement : sa voiture subit un accident.

1. On résume la situation par un arbre pondéré.



   $P(L \cap A) = 0{,}42 \times 0{,}05 = 0{,}021$ et $P\left(\overline{L} \cap A\right) = 0{,}58 \times 0{,}12 = 0{,}0696$

2. L'entreprise loue 1 000 voitures.

   $P(A) = P(L \cap A) + P\left(\overline{L} \cap A\right) = 0{,}021 + 0{,}0696 = 0{,}0906$

   Il y a donc environ 9 % de risque d'accident, donc l'entreprise peut s'attendre à environ 90 accidents si elle loue 1 000 voitures.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel, $u_{n+1} = \dfrac{6u_n + 2}{u_n + 5}$.

1. $u_1 = \dfrac{6u_0 + 2}{u_0 + 5} = \dfrac{6 \times 8 + 2}{8 + 5} = \dfrac{50}{13}$

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{6x + 2}{x + 5}$.

   a. $f'(x) = \dfrac{6 \times (x + 5) - (6x + 2) \times 1}{(x + 2)^2} = \dfrac{6x + 30 - 6x - 2}{(x + 5)^2} = \dfrac{28}{(x + 5)^2}$

   $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

   On déduit que si $x > 2$, on a $f(x) > f(2)$. Or $f(2) = \dfrac{6 \times 2 + 2}{2 + 5} = \dfrac{14}{7} = 2$.

   Donc pour tout réel $x > 2$,on a $f(x) > 2$.

   b. On va démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 2$.

- **Initialisation**

  Pour $n=0$, $u_n = u_0 = 8 > 2$; donc la propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité**

  On suppose que la propriété est vraie au rang n, c'est-à-dire $u_n > 2$.

  La fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ donc $f(u_n) > f(2)$.

  Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(2)=2$; on déduit que $u_{n+1} > 2$ et donc que la propriété est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**

  La propriété est vraie pour $n=0$ et elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n.

3. On admet que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n+5}$.

a. Pour tout n, on a $u_n > 2$ donc $u_n + 1 > 0$, $u_n + 5 > 0$ et $2 - u_n < 0$

Donc $\dfrac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n+5} < 0$ et donc $u_{n+1} - u_n < 0$.

La suite (u_n) est donc décroissante.

b. Pour tout n, $u_n > 2$ donc la suite (u_n) est minorée par 2.

La suite (u_n) est décroissante et minorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, on peut déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

a. $v_0 = \dfrac{u_0-2}{u_0+1} = \dfrac{8-2}{8+1} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

b. $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+1} = \dfrac{\dfrac{6u_n+2}{u_n+5} - 2}{\dfrac{6u_n+2}{u_n+5}+1} = \dfrac{\dfrac{6u_n+2-2u_n-10}{u_n+5}}{\dfrac{6u_n+2+u_n+5}{u_n+5}} = \dfrac{4u_n-8}{u_n+5} \times \dfrac{u_n+5}{7u_n+7}$

$= \dfrac{4(u_n-2)}{7(u_n+1)} = \dfrac{4}{7} \times \dfrac{u_n-2}{u_n+1} = \dfrac{4}{7} v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{4}{7}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{2}{3}$.

c. (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{4}{7}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{2}{3}$ donc, pour tout n, on a $v_n = \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{4}{7}\right)^n$.

Or $-1 < \dfrac{4}{7} < 1$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Pour tout n, $u_n - 2 \neq u_n + 1$ donc $\dfrac{u_n-2}{u_n+1} \neq 1$ donc $v_n \neq 1$.

$v_n = \dfrac{u_n-2}{u_n+1} \iff v_n u_n + v_n = u_n - 2 \iff 2 + v_n = u_n(1-v_n) \iff \dfrac{2+v_n}{1-v_n} = u_n$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2 + v_n = 2$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - v_n = 0$; donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2+v_n}{1-v_n} = 2$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Exercice 4

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

Partie A

Soit $(\mathscr{P})$ le plan défini par le point M$(-1 ; 1 ; 0)$ et par le vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$. Soit A$(1 ; -4 ; 5)$.

On veut déterminer la distance du point A au plan $(\mathscr{P})$, c'est-à-dire la distance AH, où H est le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{P})$.

1. $\overrightarrow{\text{AM}} \cdot \vec{n} = \left(\overrightarrow{\text{AH}} + \overrightarrow{\text{HM}}\right) \cdot \vec{n} = \overrightarrow{\text{AH}} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{\text{HM}} \cdot \vec{n}$

Or H et M sont deux points du plan $(\mathscr{P})$ dont $\vec{n}$ est un vecteur normal, donc $\overrightarrow{\text{HM}} \perp \vec{n}$ et donc $\overrightarrow{\text{HM}} \cdot \vec{n} = 0$.

On en déduit que $\overrightarrow{\text{AM}} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{\text{AH}} \cdot \vec{n}$.

Le point H est le projeté orthogonal du point A sur le plan $(\mathscr{P})$, donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{AH}}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

On en déduit que :

- $\overrightarrow{\text{AH}} \cdot \vec{n} = \text{AH} \times \left\|\vec{n}\right\|$ si $\overrightarrow{\text{AH}}$ et $\vec{n}$ sont de même sens;
- $\overrightarrow{\text{AH}} \cdot \vec{n} = -\text{AH} \times \left\|\vec{n}\right\|$ si $\overrightarrow{\text{AH}}$ et $\vec{n}$ sont de sens contraire.

$\left\|\vec{n}\right\| = \sqrt{2^2+3^2+5^2} = \sqrt{38}$

On peut donc en déduire que $\left|\overrightarrow{\text{AM}} \cdot \vec{n}\right| = \text{AH}\sqrt{38}$.

2. $\overrightarrow{\text{AM}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-1-1\\1-(-4)\\0-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\5\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{n}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{\text{AM}} \cdot \vec{n} = -2\times 2+5\times 3+(-5)\times 5 = -14$.

$\left|\overrightarrow{\text{AM}} \cdot \vec{n}\right| = \text{AH}\sqrt{38}$ équivaut à $14 = \text{AH}\sqrt{38}$ c'est-à-dire $\text{AH} = \dfrac{14}{\sqrt{38}}$.

Partie B

Soit $(\mathscr{P})$ le plan défini par le point $M(x ; y ; z)$ et par le vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. Soit $A\left(x_A ; y_A ; z_A\right)$ un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur le plan $(\mathscr{P})$.

1. $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\right) \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{HM} \cdot \vec{n}$

Or H et M sont deux points du plan $(\mathscr{P})$ dont $\vec{n}$ est un vecteur normal, donc $\overrightarrow{HM} \perp \vec{n}$ et donc $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n} = 0$.

On en déduit que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}$.

Le point H est le projeté orthogonal du point A sur le plan $(\mathscr{P})$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

$\left\|\overrightarrow{n}\right\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

On en déduit que :

- $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n} = AH\times\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ si $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{n}$ sont de même sens;
- $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n} = -AH\times\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ si $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{n}$ sont de sens contraire.

On peut donc en déduire que $\left|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}\right| = AH\times\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

2. $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Donc $\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n} &= a\left(x-x_A\right)+b\left(y-y_A\right)+c\left(z-z_A\right)\\ &= -ax_A-by_A-cz_A+ax+by+cz\\ &= -\left(ax_A+by_A+cz_A-\left(ax+by+cz\right)\right)\end{aligned}$

et donc $\begin{aligned}\left|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}\right| &= \left|-\left(ax_A+by_A+cz_A-\left(ax+by+cz\right)\right)\right|\\ &= \left|ax_A+by_A+cz_A-\left(ax+by+cz\right)\right|\\ &= \left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|\end{aligned}$

avec $d=-\left(ax+by+cz\right)$.

3. On a vu que : $\left|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}\right| = AH\times\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ et que : $\left|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}\right| = \left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|$.

On en déduit que $AH\times\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|$, et donc que :

$AH = \dfrac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.