Baccalauréat C Dijon
Juin 1983

Exercice 1 — 4 points

1. φ est défini par la matrice $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ 0 & \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}$.

En notant Δ l'axe vectoriel défini par $\vec{\imath}$, φ est une rotation vectorielle d'axe Δ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

2. Recherche des points invariants de f :

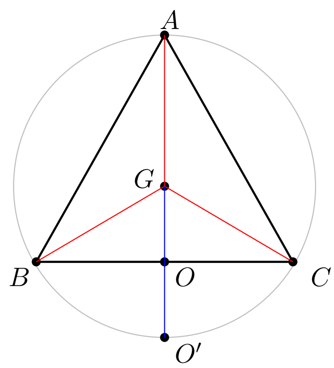
$$\left\{\begin{array}{c} x = x + a\\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z + 1\\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z - 1 - \sqrt{2}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} a = 0\\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)y - \frac{\sqrt{2}}{2}z = -1\\ \frac{\sqrt{2}}{2}y + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)z = 1 + \sqrt{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a = 0\\ y = 2 + \sqrt{2}.\\ z = 0\end{array}\right.$$

Notons D l'ensemble des points invariants ($y = 2 + \sqrt{2}$; $z = 0$) dans le cas $a = 0$. D est une droite affine de direction $\left(\overrightarrow{\imath}\right)$. $\overrightarrow{\imath}$ est choisi pour l'orientation de D.

Si $a = 0$, f est une rotation r d'axe D et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

Si $a \neq 0$, il n'y a aucun point invariant : f est un vissage $t_{a\overrightarrow{\imath}} \circ r$ où $t_{a\overrightarrow{\imath}}$ est la translation de vecteur $a\overrightarrow{\imath}$ et r la rotation du cas $a = 0$.

Exercice 2 — 4 points



1. G étant l'isobarycentre de ABC triangle équilatéral, il est situé au $\frac{2}{3}$ de la hauteur AO en partant de A.

On a donc $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AO}$ c'est-à-dire $-3\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{0}$.

A est donc le barycentre de G(-3) ; O(2).

$-3\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{MO} = -3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{MA}$. L'ensemble E est donc l'ensemble des points tels que $MA = MO'$, c'est-à-dire la droite perpendiculaire à OA passant par G puisque G est de façon évidente le milieu de AO' ($OO' = OG = \frac{1}{2}GA$ puisque $OG = \frac{1}{3}OA$).

2. $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 =$

$MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + GB^2 + MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} + GC^2 - 2\left(MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + GA^2\right) =$

$2\,\overrightarrow{MG}\,.\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}-2\,\overrightarrow{GA}\right)=$
$2\,\overrightarrow{MG}\,.\left(\overrightarrow{GO'}-2\,\overrightarrow{GA}\right)=6\,\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{AG}\,.$
$6\,\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{AG}=k$ donc l'ensemble L est une droite perpendiculaire à AG.
Si $G\in L$ alors $k=\;6\,\overrightarrow{GG}\,.\,\overrightarrow{AG}=0$ et réciproquement.

3. $MA^2+MB^2+MC^2=$
$MG^2+2\,\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{GA}+GA^2+MG^2+2\,\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{GB}+GB^2+MG^2+2\,\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{GC}+GC^2=$
$3MG^2+2\,\overrightarrow{MG}\,.\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+GA^2+GB^2+GC^2=$
$3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$.
Comme $GA=GB=GC=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ on a : $GA^2+GB^2+GC^2=a^2$ et donc :
$MA^2\;+\;MB^2\;+\;MC^2\;=\;3MG^2\;+\;a^2$
L'ensemble r est donc $\left\{3MG^2=a^2\right\}$ c'est-à-dire le cercle de centre G et de rayon $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C'est le cercle circonscrit à ABC.

PROBLÈME 12 points

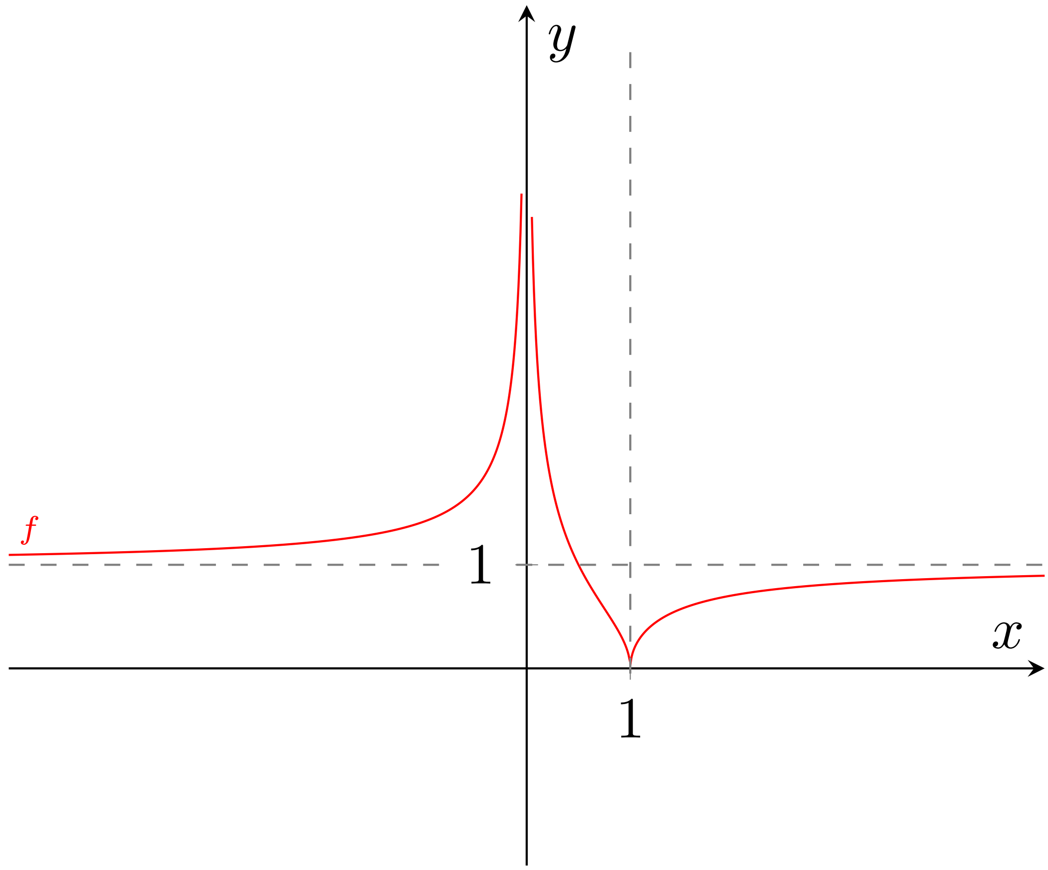
Partie A

1. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-\frac{x-1}{x}}\ si\ x\in]0\ ;\ 1]\\ \sqrt{\frac{x-1}{x}}\ si\ x\in]-\infty\ ;\ 0[\cup]1\ ;\ +\infty[\end{cases}$ et $D_f=\mathbb{R}^*$

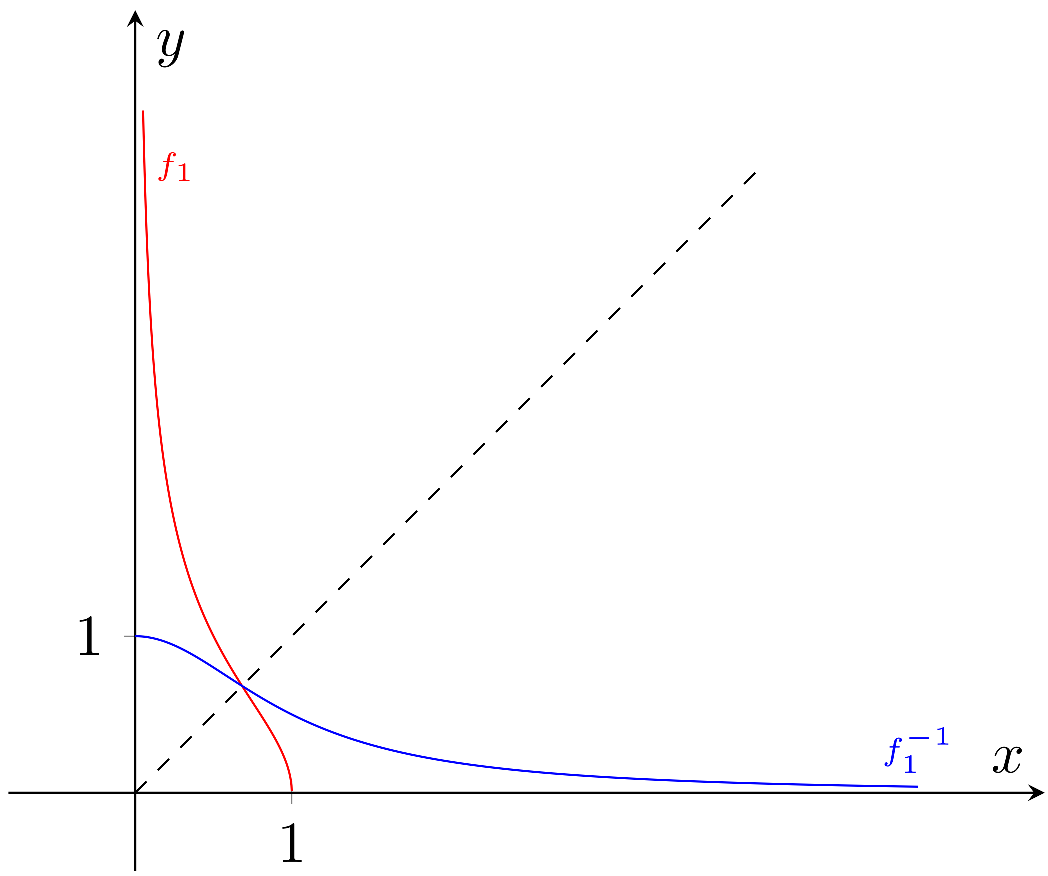
$f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{1-x}}si\ x\in]0\ ;\ 1[\\ \frac{1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{x-1}}si\ x\in]-\infty\ ;\ 0[\cup]1\ ;\ +\infty[\end{cases}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖ $-$	‖ $+$	
$f(x)$	$1^+ \nearrow +\infty$	‖ $+\infty \searrow$	0	$\nearrow 1^-$

Au point d'abscisse 1, il y a une tangente verticale à C avec un point de rebroussement.

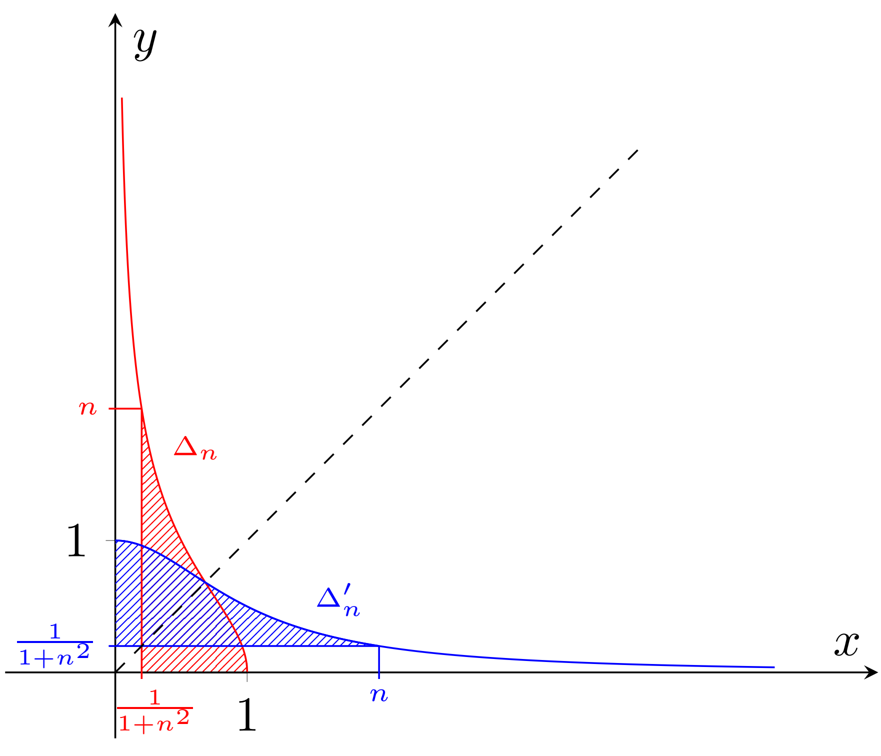


2. f_1 est continue et strictement décroissante de $]0\ ;\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ d'après la question 1 puisque f_1 est la restriction de f sur $]0\ ;\ 1]$. C'est donc une bijection.
$\sqrt{-\frac{x-1}{x}} = y \ \Leftrightarrow x = \frac{1}{1+y^2}$ (avec $y \in \mathbb{R}^+$).
La fonction réciproque est donc :
$$f_1^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow &]0\ ;\ 1] \\ x & \longmapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}.$$



3. **a.** $\Delta_n = \left\{M(x\ ;\ y)\ ; \frac{1}{1+n^2} \leq x \leq 1\ et\ 0 \leq y \leq f_1(x)\right\}$.

$\Delta'_n = \left\{M(x\ ;\ y)\ ; 0 \leq x \leq n\ et\ \frac{1}{1+n^2} \leq y \leq f_1^{-1}(x)\right\}$.



Δ'_n est donc l'image de Δ_n par la symétrie axiale de droite $y = x$. Leurs aires sont donc identiques.

b. Comme l'aire d'un carré de côté 1 est de 4 unités, $\mathcal{A}(\Delta_n) = \mathcal{A}(\Delta'_n) = 4\int_0^n \left(g(t) - \dfrac{1}{1+n^2}\right) \text{d}t =$
$4\left[\int_0^n g(t)\ \text{d}t - \left[\dfrac{t}{1+n^2}\right]_0^n\right] =$
$4\left[\int_0^n g(t)\ \text{d}t - \dfrac{n}{1+n^2}\right]$

4. **a.** $a_{n+1} - a_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{1+t^2}\,\text{d}t > 0$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

b. $0 \leq t^2 \Leftrightarrow 1 \leq 1 + t^2 \Leftrightarrow \frac{1}{t^2+1} \leq 1$.
$0 \leq 1 \Rightarrow 0 < t^2 \leq 1 + t^2 \Leftrightarrow \frac{1}{t^2+1} \leq \frac{1}{t^2}$.

c. $\frac{1}{t^2+1} \leq 1 \Rightarrow a_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\text{d}t \leq \int_0^1 1\,\text{d}t = 1$.
$\frac{1}{t^2+1} \leq \frac{1}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_1^n \frac{1}{1+t^2}\,\text{d}t \leq \int_1^n \frac{1}{t^2}\text{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n}$.

d. $a_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1}{1+t^2}\,\text{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\text{d}t + \int_1^n \frac{1}{1+t^2}\,\text{d}t \leq a_1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2 - \frac{1}{n}$.
$a_n \geq 0$ et $a_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et bornée. Elle est donc convergente ce qui montre l'existence de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{1}{1+t^2}\,\text{d}t$.

Partie B

1. g étant continue, elle est intégrable sur $[0\ ;\ x]$ (ou $[x\ ;\ 0]$ si $x < 0$), ce qui justifie l'existence de G. Par construction, $G' = g$, ce justifie la dérivabilité de G.

2. u et G sont dérivables sur I, $H = G \circ u$ est donc dérivable.
$(G[u(x)])' = u'(x).G'(u(x)) = \left(1 + \tan^2 x\right)\frac{1}{1+\tan^2 x} = 1$.
$H'(x) = 1$ donc $H(x) = x +$ constante.
$H(0) = G[u(0)] = G(0) = 0$. Donc $H(x) = x$. On a donc $G = arctan$, fonction réciproque de tan sur I.
$\frac{\pi}{4} = H\left(\frac{\pi}{4}\right) = G\left[u\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = G\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = G(1)$, c'est-à-dire $arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.
$\mathcal{A}(\Delta_1) = 4\left[\displaystyle\int_0^1 g(t)\ \text{d}t - \frac{1}{2}\right] = 4\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right] = \pi - 2$.

3. **a.** G étant dérivable sur $\mathbb{R}$, $\frac{1}{x+1}$ et $\frac{x}{x+2}$ étant dérivables sur $\mathbb{R}_+$, par composition, h et k sont dérivables.
$(h+k)'(x) = \left(G\left(\frac{1}{x+1}\right) + G\left(\frac{x}{x+2}\right)\right)' =$
$-\frac{1}{(x+1)^2}G'\left(\frac{1}{x+1}\right) + \frac{2}{(x+2)^2}G'\left(\frac{x}{x+2}\right) =$
$-\frac{1}{(x+1)^2}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x+1}\right)^2} + \frac{2}{(x+2)^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+2}\right)^2} =$
$-\frac{1}{(x+1)^2}\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1^2} + \frac{2}{(x+2)^2}\frac{(x+2)^2}{(x+2)^2+(x)^2} =$
$\frac{-1}{(x+1)^2+1} + \frac{2}{(x+2)^2+x^2} = 0$.
Ainsi : $h' + k' = 0$.

b. $h' + k' = 0$ donc $h + k =$ constante.
$h(0) + k(0) = G(1) + G(0) = \frac{\pi}{4}$ donc $(h+k)(x) = \frac{\pi}{4} = G\left(\frac{1}{x+1}\right) + G\left(\frac{x}{x+2}\right)$.
Pour $x = 1$, $G\left(\frac{1}{2}\right) + G\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$.
Ainsi : $\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$.