

🌀 Baccalauréat épreuve de spécialité (terminale) 🌀
Voie générale – spécialité J1 – Métropole – 8 septembre 2026

A. P. M. E. P.

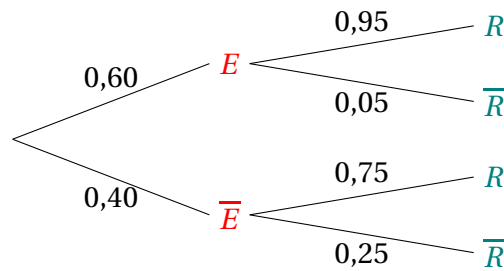
Sujet de remplacement – Corrigé

Exercice 1

5 points

Partie A

1. On représente la situation à l'aide d'un arbre de probabilité



On a : $P(E \cap R) = P(E) \times P_E(R) = 0,60 \times 0,95 = 0,57$.

2. E et $\bar{E}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales, on a
- $$\begin{aligned} P(R) &= P(E \cap R) + P(\bar{E} \cap R) \\ &= 0,57 + 0,40 \times 0,75 \\ &= 0,57 + 0,30 \\ &= 0,87 \end{aligned}$$

Cela signifie que dans cette entreprise, 87 % des livraisons respectent le délai de livraison.

3. On cherche $P_R(E)$: $P_R(E) = \frac{P(E \cap R)}{P(R)} = \frac{0,57}{0,87} = \frac{19}{29} \approx 0,655$.

Partie B

1. On considère l'expérience aléatoire « choisir une livraison effectuée par un livreur expérimenté ». C'est une épreuve de Bernoulli dont le succès est l'évènement « le délai est respecté ». La probabilité du succès est $p = 0,95$.

On répète cette expérience $n = 200$ fois de manière identique et indépendante (tirages assimilés à des tirages avec remise) donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,95$.

2. L'évènement « tous les délais sont respectés » est l'évènement $\{X = 200\}$.

$$P(X = 200) = \binom{200}{200} \times 0,95^{200} \times 0,05^0 = 0,95^{200} \approx 3,5 \times 10^{-5}.$$

On a donc $P(X = 200) > 0$: l'évènement n'est pas impossible, il est seulement très peu probable (sa probabilité arrondie à 10^{-3} est égale à 0,000).

3. $P(X \geq 190) = 1 - P(X \leq 189)$.

La calculatrice donne $P(X \geq 190) \approx 0,583$. Cela signifie que la probabilité qu'au moins 190 des 200 colis de l'échantillon soient livrés dans les délais est d'environ 58,3 %.

Partie C

1. X_A suit la loi binomiale de paramètres $n = 120$ et $p = 0,85$ donc :

$$E(X_A) = 120 \times 0,85 = 102 \quad \text{et} \quad V(X_A) = 120 \times 0,85 \times 0,15 = 15,3.$$

X_B suit la loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,90$ donc :

$$E(X_B) = 80 \times 0,90 = 72 \quad \text{et} \quad V(X_B) = 80 \times 0,90 \times 0,10 = 7,2.$$

2. Par linéarité de l'espérance : $E(S) = E(X_A) + E(X_B) = 102 + 72 = 174$.

3. Si les variables aléatoires X_A et X_B sont indépendantes, alors la variance de leur somme est la somme de leurs variances :

$$V(S) = V(X_A) + V(X_B) = 15,3 + 7,2 = 22,5.$$

C'est donc l'indépendance de X_A et X_B qui permet d'affirmer que $V(S) = 22,5$; elle est assurée ici par l'énoncé (les livraisons d'une zone n'ont pas d'incidence sur celles de l'autre).

4. L'intervalle $[165 ; 183]$ est centré sur $E(S) = 174$: $S \in [165 ; 183] \iff |S - 174| \leq 9$.

Comme S ne prend que des valeurs entières, cela équivaut à $|S - 174| < 10$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $a > 0$, on a : $P(|S - E(S)| \geq a) \leq \frac{V(S)}{a^2}$.

En l'appliquant pour $a = 10$, on obtient : $P(|S - 174| \geq 10) \leq \frac{22,5}{10^2}$ soit $P(|S - 174| \geq 10) \leq 0,225$.

En passant à l'évènement contraire :

$$P(S \in [165 ; 183]) = P(|S - 174| < 10) = 1 - P(|S - 174| \geq 10) \geq 1 - 0,225.$$

On peut donc conclure : $P(S \in [165 ; 183]) \geq 0,775$.

La probabilité que le nombre total de colis livrés dans les délais soit compris entre 165 et 183 est au moins de 77,5 %.

Exercice 2

5 points

Partie A

1. La fonction f est dérivable sur $] -3 ; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

$$\text{On a, pour tout réel } x > -3 : f'(x) = \frac{2(x+3) - 2x \times 1}{(x+3)^2} = \frac{2x+6-2x}{(x+3)^2} = \frac{6}{(x+3)^2}.$$

Pour tout $x > -3$, $(x+3)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $] -3 ; +\infty[$.

2. **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $u_1 = f(1) = \frac{2}{4} = 0,5$.

On vérifie que $0 \leq 0,5 \leq 1 \leq 1$ donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Soit n un entier naturel, on suppose que la propriété est vraie pour cet entier n , c'est-à-dire que $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$. Il faut démontrer que $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1$.

Les nombres $0, u_{n+1}, u_n$ et 1 appartiennent à $[0; 1] \subset]-3; +\infty[$, intervalle sur lequel la fonction f est croissante.

D'après l'hypothèse de récurrence, et puisque f est croissante sur $[0; 1]$:

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1 \implies f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(1)$$

$$\implies 0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 0,5$$

Comme $0,5 \leq 1$, on a bien $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1$.

Ainsi la propriété est héréditaire.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc elle est vraie pour tout entier naturel n .

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

3. D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante ($u_{n+1} \leq u_n$) et minorée par 0 : on en déduit, d'après le théorème de convergence monotone, qu'elle est convergente.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_n + 3}{2u_n} = \frac{u_n}{2u_n} + \frac{3}{2u_n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{u_n} = \frac{3}{2}v_n + \frac{1}{2}.$$

2. Pour tout entier naturel n :

$$w_{n+1} = v_{n+1} + 1 = \frac{3}{2}v_n + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}v_n + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(v_n + 1) = \frac{3}{2}w_n.$$

$$\text{De plus } w_0 = v_0 + 1 = \frac{1}{u_0} + 1 = 2.$$

La suite (w_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{3}{2}$ et de premier terme $w_0 = 2$.

3. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = w_0 \times q^n = 2 \left(\frac{3}{2}\right)^n$ donc $v_n = w_n - 1 = 2 \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1$.

$$\text{Comme } u_n = \frac{1}{v_n}, \text{ on obtient, pour tout } n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{1}{2 \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}.$$

4. On a : $\frac{3}{2} > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 = +\infty$.

Par limite de l'inverse : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

5. a. La boucle doit tourner tant que $u_n > 10^{-3}$, et chaque tour calcule le terme suivant avec

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 3}. \text{ Voici le script Python complété :}$$

```
def seuil():
    n = 0
    u = 1
    while u > 10**(-3) :
        n = n + 1
        u = 2*u/(u+3)
    return n
```

- b. On cherche le plus petit entier n tel que $u_n \leq 10^{-3}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 > 0$, donc :

$$\begin{aligned}
u_n \leq 10^{-3} &\Leftrightarrow \frac{1}{2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1} \leq 10^{-3} \\
&\Leftrightarrow 2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \geq 1000 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 500,5 \\
&\Leftrightarrow n \ln(1,5) \geq \ln(500,5) \quad \text{car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]0; +\infty[\\
&\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(500,5)}{\ln(1,5)} \quad \text{car } \ln(1,5) > 0
\end{aligned}$$

Or $\frac{\ln(500,5)}{\ln(1,5)} \approx 15,3$.

(Vérification : $u_{15} \approx 1,14 \times 10^{-3} > 10^{-3}$ et $u_{16} \approx 7,62 \times 10^{-4} \leq 10^{-3}$.)

La fonction seuil() renvoie donc 16.

Exercice 3

4 points

1. Affirmation 1 :

Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires (la première coordonnée de $\vec{v}$ est nulle, pas celle de $\vec{u}$).

On cherche deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$:
$$\begin{cases} 2 = a \\ 1 = b \\ 0 = 2a + 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ 0 = 7 \end{cases}$$

La dernière ligne est fausse : le vecteur $\vec{w}$ n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Les trois vecteurs ne sont donc pas coplanaires : ils forment une base de l'espace.

L'affirmation est **vraie**.

2. Affirmation 2 :

On a $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Les points A, B et C n'étant pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une base du plan (ABC).

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \times 1 + 3 \times (-2) + (-3) \times (-2) = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \times (-1) + 3 \times (-1) + (-3) \times (-1) = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est orthogonal à deux vecteurs formant une base du plan (ABC) donc le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est normal au plan (ABC) et la droite (CD) est orthogonale au plan (ABC).

L'affirmation est **vraie**.

3. Affirmation 3 :

Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal au plan P_1 donc une équation du plan P_1 est de la forme

$$x - 2y + 3z + d = 0$$

Le point $E(1 ; 1 ; -1)$ appartient au plan P_1 donc on doit avoir $1 - 2 \times 1 + 3 \times (-1) + d = 0$ soit $d = 4$.

Ainsi, l'équation $x - 2y + 3z + 4 = 0$ est une équation cartésienne du plan P_1 .

Le point $M(2 ; 2 ; -1)$ appartient bien à la droite d (pour $t = 1$), mais :

$$x_M - 2y_M + 3z_M + 4 = 2 - 4 - 3 + 4 = -1 \neq 0.$$

On en déduit que M n'appartient pas à P_1 : ce n'est donc pas le point d'intersection de d et P_1 .

L'affirmation est **fausse**.

4. Affirmation 4 :

La distance du point N au plan P_2 est la distance NH où H est le projeté orthogonal de N sur le plan P_2 . Il faut donc vérifier que H appartient à P_2 et que le vecteur $\overrightarrow{NH}$ est normal à P_2 .

$$\text{On a } 1 + 2 \times (-2) - 2 \times 0 + 3 = 0$$

Les coordonnées de H vérifient l'équation du plan P_2 donc H appartient à P_2 .

Le vecteur $\overrightarrow{n_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est normal au plan P_2 et $\overrightarrow{NH} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{NH} = -\overrightarrow{n_2}$: les vecteurs $\overrightarrow{NH}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{NH}$ est normal à P_2 .

H est donc le projeté orthogonal de N sur P_2 et la distance de N au plan P_2 est $NH = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$.

L'affirmation est **vraie**.

Exercice 4

6 points

Partie A

1. $2y' + 3y = 0 \iff y' = -\frac{3}{2}y$.

Les solutions de l'équation $y' = ay$ sont les fonctions $t \mapsto C e^{at}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (E') sont donc les fonctions $t \mapsto C e^{-\frac{3}{2}t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

2. La fonction f est solution de (E) donc $2f' + 3f = 8e^{-\frac{3}{2}t}$. Par suite, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} g \text{ solution de } (E) &\iff 2g' + 3g = 8e^{-\frac{3}{2}t} \\ &\iff 2g' + 3g = 2f' + 3f \\ &\iff 2(g-f)' + 3(g-f) = 0 \\ &\iff g-f \text{ solution de } (E') \end{aligned}$$

3. D'après les questions 1 et 2, g est solution de (E) si et seulement s'il existe un réel C tel que, pour tout $t \geq 0$, $g(t) - f(t) = C e^{-\frac{3}{2}t} \iff g(t) = C e^{-\frac{3}{2}t} + f(t) \iff g(t) = C e^{-\frac{3}{2}t} + 4t e^{-\frac{3}{2}t}$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions $t \mapsto (4t + C) e^{-\frac{3}{2}t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

4. $g(0) = 0 \iff (4 \times 0 + C) e^0 = 0 \iff C = 0$.

Une seule solution de (E) s'annule en 0 : la fonction f définie par $f(t) = 4t e^{-\frac{3}{2}t}$.

Partie B

1. On a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} 4t = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{3}{2}t} = 0$, sous cette forme, on a donc une forme indéterminée.

Mais, pour tout $t \geq 0$, on a : $f(t) = \frac{8}{3} \times \frac{3}{2} t e^{-\frac{3}{2}t} = \frac{8}{3} X e^{-X}$ avec $X = \frac{3}{2}t$.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}t = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} X e^{-X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$, d'après la propriété des croissances comparées.

On obtient alors, par composition : $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

À long terme, le médicament est totalement éliminé du sang.

2. a. On a, pour tout $t \geq 0$: $f'(t) = 4 \times e^{-\frac{3}{2}t} + 4t \times \left(-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}t}\right) = 4e^{-\frac{3}{2}t} - 6te^{-\frac{3}{2}t}$.

Soit $f'(t) = (4 - 6t)e^{-\frac{3}{2}t}$.

b. Pour tout $t \geq 0$, $e^{-\frac{3}{2}t} > 0$ donc le signe de $f'(t)$ est le même que celui de $4 - 6t$.

Or $4 - 6t > 0 \iff t < \frac{2}{3}$.

De plus, on a : $f(0) = 0$ et $f\left(\frac{2}{3}\right) = 4 \times \frac{2}{3} e^{-\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}} = \frac{8}{3} e^{-1} = \frac{8}{3e} \approx 0,981$.

On obtient le tableau de variations

t	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
signe de $4 - 6t$	+	0	-
signe de $f'(t)$	+	0	-
variation de f	0	$\frac{8}{3e}$	0

c. D'après le tableau de variations, la quantité de médicament dans le sang est maximale au bout de $\frac{2}{3}$ h, soit 40 minutes. Elle vaut alors $\frac{8}{3e} \approx 0,981$ mg.

3. Sur l'intervalle $[1 ; 3]$, inclus dans $\left[\frac{2}{3} ; +\infty\right]$, la fonction f est dérivable donc continue. Elle est strictement décroissante sur cet intervalle.

De plus, on a : $f(1) = 4e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,893$ et $f(3) = 12e^{-\frac{9}{2}} \approx 0,133$, donc $0,5 \in [f(3) ; f(1)]$.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 0,5$ admet une unique solution α sur $[1 ; 3]$.

La calculatrice permet d'obtenir :

$f(1,76) \approx 0,502$ et $f(1,77) \approx 0,498$ donc $1,76 < \alpha < 1,77$.

4. **Condition 1.** Le comprimé contient 1 mg : la moitié du médicament est éliminée dès que la quantité présente dans le sang est inférieure ou égale à 0,5 mg.

La fonction f est décroissante sur $\left[\frac{2}{3} ; +\infty\right]$ et $f(\alpha) = 0,5$, donc pour tout $t \geq \alpha$, $f(t) \leq 0,5$.

Or $\alpha < 1,77 < 2$; en particulier $f(2) = 8e^{-3} \approx 0,398 < 0,5$.

La moitié du médicament est éliminée au bout de $\alpha \approx 1,77$ h, soit moins de 2 heures après la prise : la condition 1 est réalisée.

Condition 2. La quantité moyenne de médicament entre 1 h et 3 h est la valeur moyenne de f sur

$[1 ; 3]$: $m = \frac{1}{3-1} \int_1^3 f(t) dt$.

On pose, pour tout $t \geq 0$, $u(t) = 4t$ et $v'(t) = e^{-\frac{3}{2}t}$.

On a alors, pour tout $t \geq 0$: $u'(t) = 4$ et on peut choisir $v(t) = -\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}t}$.

Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}\int_1^3 f(t) dt &= \left[-\frac{8}{3}te^{-\frac{3}{2}t} \right]_1^3 + \int_1^3 \frac{8}{3}e^{-\frac{3}{2}t} dt \\&= \left[-\frac{8}{3}te^{-\frac{3}{2}t} - \frac{16}{9}e^{-\frac{3}{2}t} \right]_1^3 \\&= \left[-\frac{8}{9}(3t+2)e^{-\frac{3}{2}t} \right]_1^3 \\&= -\frac{8}{9} \times 11e^{-\frac{9}{2}} + \frac{8}{9} \times 5e^{-\frac{3}{2}} \\&= \frac{8}{9} \left(5e^{-\frac{3}{2}} - 11e^{-\frac{9}{2}} \right)\end{aligned}$$

On obtient donc $m = \frac{1}{2} \times \frac{8}{9} \left(5e^{-\frac{3}{2}} - 11e^{-\frac{9}{2}} \right) = \frac{4}{9} \left(5e^{-\frac{3}{2}} - 11e^{-\frac{9}{2}} \right) \approx 0,442$.

La quantité moyenne de médicament entre 1 h et 3 h est d'environ 0,442 mg, supérieure à 0,40 mg : la condition 2 n'est pas réalisée.

L'essai clinique n'est donc pas validé.