∽ Corrigé du baccalauréat S Métropole juin 2001 ∾

EXERCICE 1 **6 points**
Commun à tous les candidats

Soient trois points de l'espace A, B, C non alignés et soit k un réel de l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
On note G_k le barycentre du système $\left\{(\text{A},\ k^2+1),\ (\text{B},\ k),\ (\text{C},\ -k)\right\}$.

1.

• Le point G_1 est donc défini par la relation vectorielle :
$2\overrightarrow{\text{G}_1\text{A}} + \overrightarrow{\text{G}_1\text{B}} - \overrightarrow{\text{G}_1\text{C}} = \overrightarrow{0}$, soit en privilégiant le point A :
$2\overrightarrow{\text{G}_1\text{A}} + \overrightarrow{\text{G}_1\text{A}} + \overrightarrow{\text{AB}} - \overrightarrow{\text{G}_1\text{A}} - \overrightarrow{\text{AC}} = \overrightarrow{0} \iff 2\overrightarrow{\text{G}_1\text{A}} + \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{CA}} = \overrightarrow{0} \iff 2\overrightarrow{\text{AG}_1} = \overrightarrow{\text{CB}}$ et finalement :

$$\overrightarrow{\text{AG}_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{CB}}.$$

Le point G_1 appartient à la parallèle à (BC) contenant A, tel que $\text{AG}_1 = \dfrac{1}{2}\text{CB}$, les vecteurs $\overrightarrow{\text{AG}_1}$ et $\overrightarrow{\text{CB}}$ ayant la même direction.

• Le point G_2 est défini par la relation vectorielle :
$2\overrightarrow{\text{G}_{-1}\text{A}} - \overrightarrow{\text{G}_{-1}\text{B}} + \overrightarrow{\text{G}_{-1}\text{C}} = \overrightarrow{0}$, soit en privilégiant le point A :
$2\overrightarrow{\text{G}_{-1}\text{A}} - \overrightarrow{\text{G}_{-1}\text{A}} - \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{G}_{-1}\text{A}} + \overrightarrow{\text{AC}} = \overrightarrow{0} \iff$

$$\overrightarrow{\text{AG}_{-1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{BC}}.$$

On constate que $\overrightarrow{\text{AG}_1} + \overrightarrow{\text{AG}_{-1}} = \overrightarrow{0}$, donc que A est le milieu de $[\text{G}_1\text{G}_{-1}]$.
Avec I milieu de [BC], on peut construire G_1 et G_{-1}n comme quatrième sommet des parallélogrammes AIBG_1 et AICG_{-1}.

2. **a.** G_k barycentre du système $\left\{(\text{A},\ k^2+1),\ (\text{B},\ k),\ (\text{C},\ -k)\right\}$ signifie :
$\left(k^2+1\right)\overrightarrow{\text{G}_k\text{A}} + k\left(\overrightarrow{\text{G}_k\text{A}} + \overrightarrow{\text{G}_k\text{B}}\right) - k\left(\overrightarrow{\text{G}_k\text{A}} + \overrightarrow{\text{G}_k\text{C}}\right) = \overrightarrow{0} \iff$
$\left(k^2+1\right)\overrightarrow{\text{G}_k\text{A}} + k\left(\overrightarrow{\text{AB}} - \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \overrightarrow{0} \iff$
$\left(k^2+1\right)\overrightarrow{\text{G}_k\text{A}} + k\overrightarrow{\text{CB}} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{\text{AG}_k} = -\dfrac{k}{k^2+1}\overrightarrow{\text{BC}}.$
$\left(k^2+1\right)\overrightarrow{\text{G}_k\text{A}} + k\overrightarrow{\text{G}_k\text{A}} + \overrightarrow{\text{G}_k\text{B}} - k\overrightarrow{\text{G}_k\text{C}} = \overrightarrow{0}$ avec $k \in [-1\ ;\ 1]$.

b.

$$f(x) = -\frac{x}{x^2+1}.$$

Sur $[-1\ ;\ 1]$, comme $x^2+1 \geqslant 1 > 0$, le fonction est définie et sur intervalle :
$f'(x) = -\dfrac{x^2+1-2x\times x}{\left(x^2+1\right)^2} = -\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}\dfrac{(x+1)(x-1)}{\left(x^2+1\right)^2}$
Le dénominateur étant positif, le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme x^2-1 ; on sait que celui-ci est positif sauf entre ses racines -1 et 1, donc justement sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$, $f'(x) \leqslant 0$, donc la fonction est décroissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ de $f(-1) = \dfrac{1}{2}$ à $-\dfrac{1}{2}$

c. La fonction f définit une bijection strictement décroissante de l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]$, donc tous les points G_k sont les points tels que $\overrightarrow{\text{AG}_k} = k\overrightarrow{\text{BC}}$, avec $k \in \left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]$. Ce sont donc tous les points du segment $[\text{G}_1\text{G}_{-1}]$.

Pour la suite de l'exercice, aucune figure n'est demandée sur la copie.

3. • En faisant intervenir le barycentre G_1 dans la première somme on obtient :
$2\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}} = 2\overrightarrow{\text{MG}_1} + 2\overrightarrow{\text{G}_1\text{A}} + \overrightarrow{\text{MG}_1} + \overrightarrow{\text{G}_1\text{B}} - \overrightarrow{\text{MG}_1} - \overrightarrow{\text{G}_1\text{C}} = 2\overrightarrow{\text{MG}_1}$ d'après la définition de G_1.

• De même en faisant intervenir G_{-1} dans la deuxième somme on obtient :
$2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\,\overrightarrow{MG_{-1}}$.
Les deux vecteurs ont la même norme si $\left\|2\overrightarrow{MG_1}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MG_{-1}}\right\| \iff \left\|\overrightarrow{MG_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{MG_{-1}}\right\| \iff$ $MG_1 = MG_{-1}$: l'ensemble (E) est donc le plan médiateur du segment$[G_1G_{-1}]$.

4.

$$\left\|2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|.$$

En utilisant G_1 barycentre de A, B, C affectés des coefficient 2, 1, −1 ; on obtient :
$2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\,\overrightarrow{MG_1}$.
La somme des coefficients qui apparaissent dans le deuxième vecteur est égale à zéro : le barycentre des trois points n'existe pas.
Par contre on peut simplifier ce deuxième vecteur en faisant intervenir le point I milieu de [BC] :
$2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\,\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IA}$.
On a donc en prenant la norme de ces deux vecteurs :
$\left\|2\,\overrightarrow{MG_1}\right\| = \left\|2\overrightarrow{IA}\right\| \iff 2MG_1 = 2IA \iff G_1M = IA$, donc l'ensemble (F) est la sphère de centre G_1 de rayon IA.

5. L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Les points A, B, C ont pour coordonnées (0; 0; 2), (−1 ; 2 ; 1) et (−1 ; 2 ; 5). (E) et (F) sont définis comme ci-dessus.

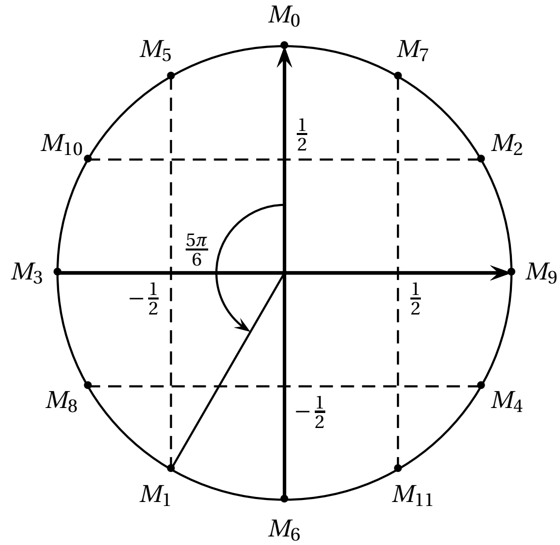
a. On a $\overrightarrow{OA} = 4\,\vec{k}$, $\quad \overrightarrow{BC} = 4\,\vec{k}$.
Par suite $\overrightarrow{AG_{-1}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2} \times 4\,\vec{k} = 2\,\vec{k}$ et
$\overrightarrow{AG_1} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB} = -2\,\vec{k}$: G_1 a donc une abscisse et une ordonnée nulle et sa cote est telle que $z-2=-2$ soit $z=0$. Donc $G_1 = O$.
De même on a $G_{-1}(0\,;\,0\,;\,4)$.
L'ensemble (F) est la sphère de centre O et de rayon $IA = OB = \sqrt{(-1)^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}$.
L'ensemble (E) est le plan médiateur contenant A et perpendiculaire à (OA) : il coupe la sphère (F) car $OA = 2$ et $2 < \sqrt{6}$ car $2^2 < 6$.

b. Si M est un point du cercle $\mathscr{C}$ intersection de (E) et (F), $[AM]$ est un côté du triangle rectangle d'hypoténuse $[OM]$ tel que $OM = \sqrt{6}$ et $OA = 2$.
On a d'après le théorème de Pythagore dans le triangle OAM rectangle en A : $OM^2 = AM^2 + OA^2 \iff AM^2 = OM^2 - OA^2 = 6-4 = 2$: le rayon du cercle $\mathscr{C}$ est donc égal à $\sqrt{2}$.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ [unité graphique : 6 cm].
On considère la suite (α_n) de nombres réels définie par $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \dfrac{5\pi}{6}$. Pour tout entier naturel n, on appelle M_n le point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 tel que l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_n}\right)$ ait pour mesure α_n.

1.



2. De la relation $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \dfrac{5\pi}{6}$ on déduit :

$\left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{OM_{n+1}}\right) = \left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{OM_n}\right) + \dfrac{5\pi}{6}$ (mod. 2π), d'où $\left(\overrightarrow{OM_n}\,,\,\overrightarrow{OM_{n+1}}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$.

Conclusion : le point M_{n+1} est l'image du point M_n dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{5\pi}{6}$.

Le premier point M_0 a une affixe égale à $z_0 = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$ et les onze autre points s'obtiennent en ajoutant 11 fois $\dfrac{5\pi}{6}$ à l'argument de z_0

3. **a.** Montrer, pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes :

- On a $\alpha n + 6 = \alpha_n + 6 \times \dfrac{5\pi}{6} = \alpha_n + 5\pi = \alpha_n + \pi$: les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés
- M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés et M_{n+6} et M_{n+12} sont diamétralement opposés ; donc M_n et M_{n+12} sont confondus.

b. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+4} = z_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\times\frac{5\pi}{6}} = z_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{20\pi}{6}} = z_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{10\pi}{3}} = z_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-2\pi}{3}}$.

On a donc dans le triangle OM_nM_{n+4} isocèle en O la relation :

$M_nM_{n+4}^2 = OM_n^2 + OM_{n+4}^2 - 2OM_nOM_{n+4}\cos\widehat{M_nOM_{n+4}} = 1 + 1 - 2\cos\dfrac{2\pi}{3} = 2 - 2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 3.$

Donc $M_nM_{n+4} = \sqrt{3}$.

On admettra que tous les triangles équilatéraux ayant pour sommets des points M_n sont de la forme $M_nM_{n+4}M_{n+8}$.

On a d'après le résultat précédent : $M_4M_8 = \sqrt{3}$ et aussi $\left(\overrightarrow{OM_{n+4}}\,,\,\overrightarrow{OM_{n+8}}\right) = -\dfrac{2\pi}{3}$, d'où

$\widehat{M_nOM_{n+4}} = \dfrac{2\pi}{3} = \widehat{M_{n+4}OM_{n+8}} = \widehat{M_{n+8}OM_n}$.

On a aussi $M_{n+8}M_n = \sqrt{3}$, donc le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$ est équilatéral.

4. On peut obtenir les triangles équilatéraux :

$$M_0M_4M_8,\quad M_1M_5M_9,\quad M_2MM_6M_{10},\quad M_3M_7M_{11}$$

Le nombre de cas favorables est donc : 4 et le nombre de cas possibles est $\binom{12}{3} = \dfrac{12!}{3!\times 9!}$.

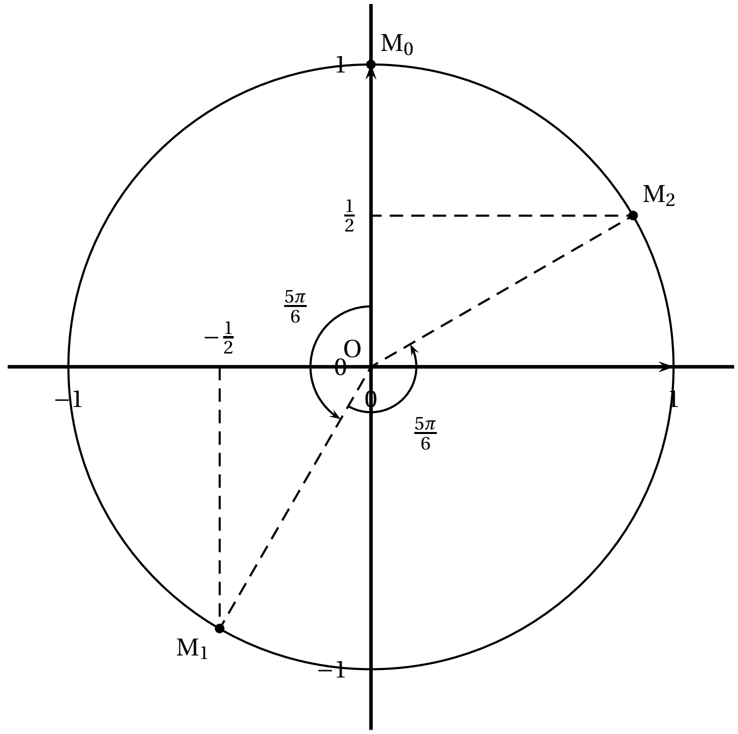
La probabilité d'obtenir les trois sommets d'un triangle équilatéral est donc égale à : $\dfrac{4}{\frac{10\times11\times12}{4\times3\times2}} = \dfrac{1}{55}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. La multiplication par $\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}$ correspond à une rotation de centre O et d'angle $\dfrac{5\pi}{6}$.

M_0 est le point d'affixe i. On obtient les points successifs sur la figure ci-dessous :



Démonstration par récurrence :

Initialisation : on a $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\times 0\pi}{6}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}\right)}$: l'égalité est vraie au rang 0.

Hérédité : soit un entier quelconque p, $p \geqslant 0$ et supposons que $z_p = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5p\pi}{6}\right)}$.

Alors $z_{p+1} = z_p \times \mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5p\pi}{6}\right)} \times \mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5(p+1)\pi}{6}\right)}$; donc la relation est vraie au rang $p+1$.

La relation est vraie au rang 0 et pour tout entier $n \geqslant 0$, $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$ entraà®ne que $z_{n+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5(n+1)\pi}{6}\right)}$; on a donc démontré par le principe de la récurrence que pour tout naturel n, $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$.

3. M_n et M_p sont confondus si, et seulement si les arguments de z_n et de z_p sont égaux à $2k\pi$ près, soit si :

$\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6} = \frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}+2k\pi \iff \frac{5n\pi}{6} = \frac{5n\pi}{6}+2k\pi \iff$

$5n\pi = 5p\pi + 12k\pi \iff 5n = 5p+12k \iff 5n-5p = 12k \iff 5(n-p) = 12k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Donc $5(n-p)$ divise 12 mais comme 5 est premier avec 12, d'après le théorème de Gauss, $(n-p)$ divise 12 ou encore $(n-p)$ est un multiple de 12.

4. a. On a $12\times 4 - 5\times 9 = 48 - 45 = 3$: le couple $(4\,;9)$ est une solution de l'équation (E). De : $\begin{cases} 12x-5y &= 3\\ 12\times 4 - 5\times 9 &= 3\end{cases}$ on en déduit par différence $12(x-4)-5(y-9) = 0 \iff 12(x-4) = 5(y-9)$ (1).

On en déduit que 5 divise $12(x-4)$, mais comme 5 est premier avec 12 d'après le théorème de Gauss, 5 divise $x-4$.

Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x-4 = 5k \iff x = 4+5k$, $k \in \mathbb{Z}$.

En remplaà§ant dans (1) $x-4$ par $5k$, on obtient :

$12\times 5k = 5(y-9) \iff 12k = y-9 \iff y = 9+12k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Inversement : $12\times(4+5k) - 5\times(9+12k) = 48+60k-45-60k = 48-45 = 3$.

Les couples solutions de (E) sont donc les couples $(4+5k\ ;\ 9+12k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Avec $k = 0$ on retrouve le couple solution donné dans l'énoncé.

b. M_n appartient à $[\mathrm{O}x)$ si $\arg z_n = 0 \quad [2\pi] \iff \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{5n\pi}{6} = 0 \quad [2\pi] \iff \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{5n\pi}{6} = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, ou encore
$\dfrac{1}{2} + \dfrac{5n}{6} = 2k \iff 3 + 5n = 12k \iff 12k - 5n = 3$. On retrouve l'équation (E) avec $x = k$ et $y = n$. Les solutions sont telles que $y = n = 9 + 12k'$, avec $k' \in Z$.
n étant un naturel, finalement M_n appartient à la demi-droite $[\mathrm{O}x)$ si, et seulement si :

$$n = 9 + 12k', \quad k' \in \mathbb{N}.$$

PROBLÈME **9 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Toutes les courbes demandées seront représentées sur un màªme graphique (unité graphique : 2 cm).

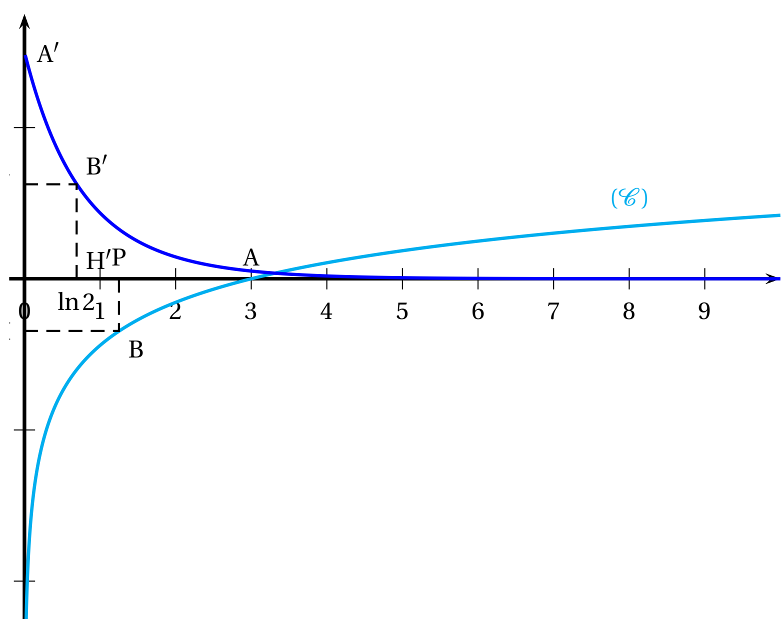
Partie A

⋆ Étude d'une fonction f

On définit la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x} - 1\right).$$

1. • Limite en 0 :
On a $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1+x} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x} - 1\right) = 0$ et enfin $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\sqrt{1+x} - 1\right) = -\infty$.
• Limite en $+\infty$:
$\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{1+x} - 1 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\sqrt{1+x} - 1\right) = +\infty$.
2. f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1+x} - 1} = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}\left(\sqrt{1+x} - 1\right)}$.
Or $x > 0 \Rightarrow x + 1 > 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} > 1 \iff \sqrt{x+1} - 1 > 0$: tous les termes de la dérivée sont supérieurs à zéro, donc sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) > 0$: la fonction est croissante de moins à plus l'infini.
3. On a $f(3) = \ln\left(\sqrt{1+3} - 1\right) = \ln\left(\sqrt{4} - 1\right) = \ln 1 = 0$. Donc $\mathrm{A}(3\,;0)$.
D'autre part $f\left(\frac{5}{4}\right) = \ln\left(\sqrt{1 + \frac{5}{4}} - 1\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{9}{4}} - 1\right) = \ln\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$. $\mathrm{B}\left(\frac{5}{4}\,;\,-\ln 2\right)$.
Donc $\mathrm{P}\left(\frac{5}{4}\,;\,0\right)$ et $\mathrm{H}(0\,;\,-\ln 2)$.



Partie B

⋆ Utilisation d'une rotation

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. à€ tout point M du plan d'affixe z la rotation r associe le point M' d'affixe z'.

1. **a.** On sait que la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ associe au point M d'affixe z, le point M' d'affixe z' tel que :
$z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} z = \mathrm{i}z$.
On a donc $z' = x' + \mathrm{i}y' = \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) \iff x' + \mathrm{i}y' = \mathrm{i}x - y$, soit en identifiant les parties réelle et imaginaires :
$\left\{\begin{array}{lcr} x' & = & -y \\ y' & = & x \end{array}\right.$. On obtient de faà§on immédiate : $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & y' \\ y & = & -x' \end{array}\right.$

   b. D'après la question précédente : $\mathrm{A}'(0~;~3)$, $\mathrm{B}\left(\ln 2~;~\frac{5}{4}\right)$, $\mathrm{P}\left(0~;~\frac{5}{4}\right)$.

2. **a.** $M(x~;~y)$ appartient à $(\mathscr{C})$ si et seulement $y = \ln\left(\sqrt{1+x} - 1\right)$ soit en remplaà§ant x et y avec les formules trouvées :
$-x' = \ln\left(\sqrt{1+y'} - 1\right) \iff \mathrm{e}^{-x'} = \sqrt{1+y'} - 1 \iff \mathrm{e}^{-x'} + 1 = \sqrt{1+y'} \Rightarrow \left(\mathrm{e}^{-x'} + 1\right)^2 = 1 + y' \iff \mathrm{e}^{-2x'} + 2\mathrm{e}^{-x'} + 1 = 1 + y' \iff \mathrm{e}^{-2x'} + 2\mathrm{e}^{-x'} = y'$, ce qui signifie que le point M' appartient à (Γ).

   b. Voir plus haut.

Partie C

⋆ Calcul d'intégrales

On rappelle que l'image d'un domaine plan par une rotation est un domaine plan de même aire.

1. On a $\displaystyle\int_0^{\ln 2} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2}\left(\mathrm{e}^{-2x} + 2\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 2\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\ln 2} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\ln 2} - 2\mathrm{e}^{-\ln 2} - \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{0} - 2\mathrm{e}^{0}\right) = -\frac{1}{2\mathrm{e}^{\ln 4}} - \frac{2}{\mathrm{e}^{\ln 2}} + \frac{5}{2} = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{11}{8}$.
La fonction g est bien entendu positive sur $[0~;~\ln 2]$, donc l'intégrale précédente est égale en unités d'aire à l'aire de la surface limitée par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 2$.

2. **a.** La droite $x = \ln 2$ est la droite $(\mathrm{H}'\mathrm{B}')$, donc l'image de la surface $\mathscr{D}$ et la surface dont on vient de calculer l'aire. On a donc inversement $\mathscr{A} = \frac{11}{8}$.

   b. On a vu que sur $\left[\frac{5}{4}~;~3\right]$, le fonction f est négative, donc l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\frac{5}{4}}^{3} \ln\left(\sqrt{1+x} - 1\right)\mathrm{d}x$ est l'opposée de l'aire de de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les segments [BP] et [PA].
On a donc $\mathscr{A} = \text{aire(OHBP)} - I$ d'où
$I = \dfrac{5}{4}\ln 2 - \mathscr{A} = \dfrac{5}{4}\ln 2 - \dfrac{11}{8} \approx -0,51$.