

Baccalauréat Métropole groupe 4 juin 1991

Exercice 1

4 points

1. a. Notons f l'application qui à z associe z' et notons z_A l'affixe de A .

$$\text{On a : } f(z_A) = f(2) = \frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 = z_A.$$

On a donc $\varphi(A) = A$, c'est-à-dire : A est donc un invariant de φ .

- b. Cherchons P d'affixe z_P tel que $f(z_P) = 0$.

$$\text{On a alors } z_P = \frac{-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}{\frac{3+i\sqrt{3}}{4}}, \text{ c'est-à-dire } z_P = 2i \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2. φ est une similitude directe du plan car f est de type $az + b$. D'après la question 1., son centre est A

En suivant la suggestion de l'énoncé, son angle et son rapport sont donnés par

$$\frac{f(z_P) - f(z_A)}{z_P - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Note : il était bien plus simple de calculer directement le module et l'argument de a .

φ est donc une similitude directe de centre A , de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

3. a. Dans le triangle AMM' , on a $AM' = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\left(\widehat{AM, AM'} \right) = \frac{\pi}{6}$.

En utilisant la loi des cosinus (formule d'Al-Kashi) pour MM' , on a :

$$MM'^2 = AM'^2 + AM^2 - 2AM \cdot AM' \cos \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{On a alors } MM'^2 + AM'^2 = 2AM'^2 + AM^2 - 2AM \cdot AM' \cos \frac{\pi}{6} =$$

$$\frac{3}{2}AM^2 + AM^2 - \frac{3}{2}AM^2 = AM^2.$$

La réciproque du théorème de Pythagore permet de conclure : le triangle AMM' est rectangle en M' . On notera que $MM' = \frac{1}{2}AM$ et que $\widehat{M'MA} = \frac{\pi}{3}$.

- b. Notons I le milieu de AM et r la distance $d(A, I)$.

M' se trouve sur le cercle de centre I et de rayon r car le triangle AMM' est rectangle en M' .

M' se trouve sur le cercle de centre M et de rayon r car le triangle IMM' est équilatéral.

M' se trouve alors à l'intersection de ces deux cercles. Parmi les deux points d'intersection, un correspond à l'angle de mesure $+\frac{\pi}{6}$ (c'est M') tandis que

l'autre correspondra à un angle de mesure $-\frac{\pi}{6}$.

Exercice 2

4 points

1. a. On a :

$$x'(t) = 2e^t - e^{-t} = y(t).$$

$$y'(t) = 2e^t + e^{-t} = x(t).$$

Au point $M(a, b)$, le vecteur vitesse \vec{v} a pour composante (b, a) . Ce vecteur dirige la tangente en M à (C) . On notera \vec{u} ce vecteur directeur.

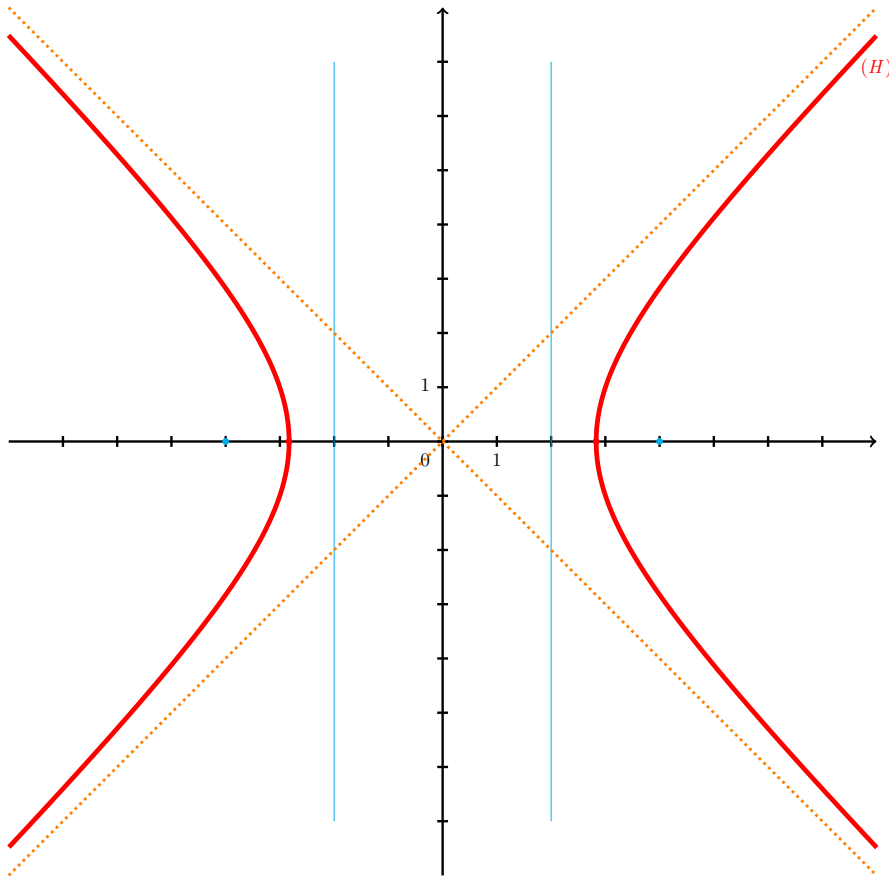
b. On a $\vec{u} = \overrightarrow{ON}$. Comme $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$, on a $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{ON} = \vec{u}$. (MT) est donc la tangente en M à (C) .

2. a. $x^2 - y^2 = (2e^t + e^{-t})^2 - (2e^t - e^{-t})^2 = (4e^t)(2e^{-t}) = 8$.
 (C) est donc contenue dans (H) .

b. L'équation réduite de (H) est $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{y}{2\sqrt{2}}\right)^2 = 1$ c'est-à-dire

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \text{ avec } a = b = 2\sqrt{2} \text{ et } c = 4.$$

Le centre est en O , les foyers sont $F(4; 0)$ et $F(-4; 0)$, les asymptotes sont $y = x$ et $y = -x$, les directrices sont $x = 2$ et $x = -2$ et les sommets sont $S(2\sqrt{2}; 0)$ et $S'(-2\sqrt{2}; 0)$.



PROBLÈME

12 points

Partie I

1. a. Les limites de l'ensemble de définition sont 0 et $+\infty$.

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty,$$

$$\text{on a } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

- b. Comme $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x - 2$ sont des fonctions strictement croissantes, f est une fonction strictement croissante de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} .
2. a. f étant continue sur \mathbb{R}_+^* et strictement croissante d'après I 1.b, c'est une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} .

L'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution unique ℓ dans \mathbb{R}_+^* .

De plus, $f(1) = -1$ qui est strictement négatif et $f(2) = \frac{1}{2} \ln 2$ qui est strictement positif.

On a donc $\ell \in]1 ; 2[$.

- b. Signe de f :

x	0	ℓ	$+\infty$
$f(x)$		-	0
			+

Partie II

1. a. Comme $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur son domaine de définition, $x \mapsto -\frac{1}{2} \ln x$ est strictement décroissante et donc φ est strictement décroissante sur $[1 ; 2]$. La définition de φ peut-être étendue à \mathbb{R}_+^* et φ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* . En particulier $\varphi(e) = \frac{3}{2}$.

x	1	2
$\varphi(x)$	2	$\varphi(2)$

Comme $2 < e$ et comme φ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* , on a

$\varphi(e) < \varphi(2)$, c'est-à-dire $\frac{3}{2} < \varphi(2)$.

Comme φ est continue et strictement décroissante sur $[1 ; 2]$, son image est $[\varphi(2) ; 2]$ qui est donc contenu dans $[1 ; 2]$.

- b. L'équation $\varphi(x) = x$ est équivalente à $f(x) = 0$ qui admet $\ell \in]1 ; 2[$ comme solution unique. Cela permet de conclure que ℓ est l'unique solution de $\varphi(x) = x$.
2. a. Démontrons par récurrence la propriété. Comme $U_0 = 1$, la propriété est vraie au rang 0.

Supposons la propriété vraie au rang n , c'est-à-dire $U_n \in [1 ; 2]$, alors d'après II 1.a, $\varphi(U_n) \in [1 ; 2]$. La propriété est alors vraie au rang $n + 1$. D'après l'axiome de récurrence, la proposition est vraie pour tout entier n .

- b. $\varphi'(x) = -\frac{1}{2x}$. Sur le domaine considéré, $|\varphi'(x)| = \frac{1}{2x}$. Pour $x \geq 1$, on a $\frac{1}{2x} \leq \frac{1}{2}$.

On en conclut que $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

- c. En utilisant l'inégalité des accroissements finis à φ sur $[U_n ; 2]$ avec le majorant $\frac{1}{2}$ trouvé en II 2.c, on a $\left| \frac{\varphi(U_n) - \varphi(\ell)}{U_n - \ell} \right| \leq \frac{1}{2}$.

Comme $\varphi(U_n) = U_{n+1}$ et $\varphi(\ell) = \ell$, on peut conclure que $|U_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |U_n - \ell|$.

d. De la question précédente, on déduit que $|U_n - l| \leq \frac{1}{2^n} |U_0 - l|$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} |U_0 - l| = 0$, on peut conclure que U converge vers l .

e. Comme $|U_0 - l|$ est majoré par 1, il suffit de choisir n_0 tel que $2^{n_0} > 100$. Par exemple $n_0 = 7$. On a alors $1,73 < U_7 < 1,74$.

Partie III

1. On remarque que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 = g(0)$. g est donc continue à droite en 0.

Pour $x > 0$, $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = -\frac{7}{8}x + 1 - \frac{1}{4}x \ln x$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 1.$$

On en conclut que g est dérivable en 0 de nombre dérivé 1.

2. $g'(x) = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}(2x \ln x + x) = -2x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x$.

$$x f\left(\frac{1}{x}\right) = x \left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{x}\right) = 1 - 2x - \frac{1}{2}x \ln x = g'(x).$$

3. Sur $[0 ; 1]$, $g'(x)$ est du signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$. On a donc :

x	0	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -
$g(x)$	0	$\longrightarrow g\left(\frac{1}{\ell}\right)$	$\longrightarrow -\infty$

Partie IV

1. a. D'après III 1. $g'(0) = 1$. Comme $g(0) = 0$, la tangente (D) a pour équation réduite $y = x$ (coefficient directeur 1 et ordonnée à l'origine 0).

b. L'abscisse d'un point d'intersection vérifie $g(x) = x$, c'est-à-dire

$$\frac{x^2}{4} \left(\frac{7}{2} + \ln x\right) = 0. \text{ En plus du point } (0 ; 0), \text{ on a le point } \left(e^{-\frac{7}{2}} ; e^{-\frac{7}{2}}\right).$$

c. Comme $x - g(x) = \frac{x^2}{4} \left(\frac{7}{2} + \ln x\right)$, on a :

$$g(x) > x \text{ sur }]0 ; e^{-\frac{7}{2}}[$$

$$g(x) < x \text{ sur }]e^{-\frac{7}{2}} ; 1]$$

$$g(x) = x \text{ pour } x = 0 \text{ ainsi que pour } x = e^{-\frac{7}{2}}.$$

d. Pour $x > 0$, $\alpha'(x) = -\frac{x}{2}(4 + \ln x)$ qui s'annule en $x = e^{-4}$. On a donc les variations suivantes :

x	0	e^{-4}	$e^{-\frac{7}{2}}$
$\alpha'(x)$	0	+	0 -
$\alpha(x)$	0	$\frac{1}{8}e^{-8}$	0

Comme $\frac{1}{8}e^{-8} < 5 \times 10^{-5}$, on a : $0 \leq \alpha(x) \leq 5 \times 10^{-5}$.

Avec une unité graphique à 10 cm, l'épaisseur d'un trait de crayon est de l'ordre de $\frac{1}{1000}$ d'unité. Il n'est donc pas possible de distinguer (C) et (D) à cette échelle.

2. a. On vérifie facilement que $\beta(0) = 0$. Comme $\beta'(x) = -\frac{7}{4}x + 1$, on a $\beta'(0) = 1$, ce qui permet de conclure que (D) est la tangente à (Γ) à l'origine.
- b. $g(x) - \beta(x) = -\frac{1}{4}x^2 \ln x$. Sur $[0 ; 1]$, $\ln x \leq 0$. On a donc $\beta(x) \leq g(x)$ sur le domaine considéré, c'est-à-dire (Γ) est en dessous de (C) .
- c. Représentation graphique :

