∽ Baccalauréat S Métropole septembre 2001 ∾

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

On dispose de deux urnes a et b contenant des boules blanches ou rouges indiscernables au toucher. L'épreuve consiste à choisir une urne parmi les urnes a et b proposées (le choix de l'urne est effectué au hasard, les deux choix étant équiprobables) puis à effectuer le tirage d'une boule dans l'urne choisie.

On note A l'évènement « l'urne a est choisie », B l'évènement « l'urne b est choisie » et R l'évènement « une boule rouge est obtenue au tirage ».

On note $p_A(R)$ la probabilité conditionnelle de l'évènement R par rapport à l'évènement A.

1. **a.** On a $p(A) = p(B) = 0,5$;
$p_A(R) = \dfrac{1}{4+1} = \dfrac{1}{5} = 0,2$;
$p(A \cap R) = p(A) \times p_A(R) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{10} = 0,1$.

   b. On a de même $p_B(R) = \dfrac{4}{4+2} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.
D'après la loi des probabilités totales :
$p(R) = p(A \cap R) + p(B \cap R) = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{30} + \dfrac{10}{30} = \dfrac{13}{30}$.

   c. Il faut calculer $p_R(A) = \dfrac{p(A \cap R)}{p(R)} = \dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{13}{30}} = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{30}{13} = \dfrac{3}{13}$.

2. Dans cette question, on suppose que l'urne a contient quatre boules blanches et l'urne b deux boules blanches. L'urne a contient en outre n boules rouges (où n désigne un entier naturel inférieur ou égal à 5), l'urne b en contient $5-n$.

   a. Exprimer $p_A(R)$ et $p_B(R)$ en fonction de n. On a $p_(R) = \dfrac{n}{4+n}$ et $p_B(R) = \dfrac{5-n}{5-n+2} = \dfrac{5-n}{7-n}$.

   b. On a $p(R) = p(R \cap A) + p(R \cap B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{n}{4+n} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5-n}{7-n} = \dfrac{n(7-n)+(4+n)(5-n)}{2(4+n)(7-n)} =$
$\dfrac{7n-n^2+20-4n+5n-n^2}{2(4+n)(7-n)} = \dfrac{-2n^2+8n+20}{2(4+n)(7-n)} = \dfrac{-n^2+4n+10}{(4+n)(7-n)}$.

   c. On obtient le tableau suivant :

n et $5-n$	0 et 5	1 et 4	2 et 3	3 et 2	4 et 1	5 et 0
$\dfrac{-n^2+4n+10}{(4+n)(7-n)}$	$\frac{5}{14} \approx 0,357$	$\frac{13}{30} \approx 0,433$	$\frac{7}{15} \approx 0,467$	$\frac{13}{28} \approx 0,464$	$\frac{5}{12} \approx 0,417$	$\frac{5}{18} \approx 0,278$

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ direct.

Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe $-$i.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C} - \{\text{i}\}$ par :

$$f(z) = \frac{1 - \text{i}z}{z - \text{i}}.$$

1. Quel que soit $z \in \mathbb{C} - \{\text{i}\}$, $\quad -\text{i} + \dfrac{2}{z-\text{i}} = \dfrac{-\text{i}(z-\text{i})+2}{z-\text{i}} = \dfrac{-\text{i}z-1+2}{z-\text{i}} = \dfrac{1-\text{i}z}{z-\text{i}} = f(z)$.

2. **a.** Si z a pour image $-$i, alors :
$f(z) = -\text{i} \iff \dfrac{1-\text{i}z}{z-\text{i}} = -\text{i} \iff 1 - \text{i}z = -\text{i}(z-\text{i}) \iff 1 - \text{i}z = 1 - \text{i}z$: cette équation n'a pas de solution.

b. • On a $f(z) = 0 \iff \dfrac{1-\mathrm{i}z}{z-\mathrm{i}} = 0 \iff 1-\mathrm{i}z = 0 \iff 1 = \mathrm{i}z \iff z = \dfrac{1}{\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}}{-1} = -\mathrm{i}$.

Le seul antécédent de 0 est $-\mathrm{i}$.

• On a $f(z) = \mathrm{i} \iff \dfrac{1-\mathrm{i}z}{z-\mathrm{i}} = \mathrm{i} \iff 1-\mathrm{i}z = \mathrm{i}(z-\mathrm{i}) \iff 1-\mathrm{i}z = \mathrm{i}z+1 \iff 0 = 2\mathrm{i}z \iff z = 0$.

Le seul antécédent de i est 0.

3. À tout point M différent de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = f(z)$.

a. On a pour $z \neq \mathrm{i}$,

$z' = \dfrac{1-\mathrm{i}z}{z-\mathrm{i}} \Rightarrow z' + \mathrm{i} = \dfrac{1-\mathrm{i}z}{z-\mathrm{i}} + \mathrm{i} = \dfrac{1-\mathrm{i}z+\mathrm{i}+1}{z-\mathrm{i}} = \dfrac{2}{z-\mathrm{i}}$.

$z' + \mathrm{i}$ est l'affixe de $\overrightarrow{\mathrm{B}M'}$ et $z - \mathrm{i}$ est l'affixe de $\overrightarrow{\mathrm{A}M}$, donc

$z' + \mathrm{i} = \dfrac{2}{z-\mathrm{i}}$ donne en prenant le module des deux membres égaux :

$\mathrm{B}M' = \dfrac{2}{\mathrm{A}M} \iff \mathrm{B}M' \times \mathrm{A}M = 2$.

b. Si $M \in \mathscr{C}(\mathrm{A}, 4)$, alors $\mathrm{A}M = 4$

D'après le résultat précédent il en résulte que $\mathrm{B}M' \times 4 = 2 \iff \mathrm{B}M' = \dfrac{1}{2}$ ce qui montre que $M' \in \mathscr{C}\left(\mathrm{B}, \frac{1}{2}\right)$.

4. a. Si M a pour affixe $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$z - \mathrm{i} \in \mathbb{R} \iff x + \mathrm{i}y - \mathrm{i} \in \mathbb{R} \iff x = \mathrm{i}(1-y) \in \mathbb{R} \iff 1 - y = 0 \iff y = 1$: l'ensemble E est la droite parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y = 1$ (excepté le point A qui a une partie réelle nulle).

b. Si $M(z = x + \mathrm{i}y) \in E$, alors $y = 1$.

On a donc $z' = \dfrac{1-\mathrm{i}(x+\mathrm{i})}{x+\mathrm{i}-\mathrm{i}} = \dfrac{[1-\mathrm{i}x+1)}{x} = \dfrac{2-\mathrm{i}x}{x} = \dfrac{2}{x} - \mathrm{i}$, donc M' appartient à la droite Δ d'équation $y = -1$.

c. B d'affixe $(-\mathrm{i})$ appartient à la droite Δ et $(-\mathrm{i})$ n'a pas d'antécédent M par f : la droite Δ n'est donc pas décrite entièrement.

5. On a donc $f(z) = y\mathrm{i}$, avec $y \neq 0$.

On a vu que l'équation $f(z) = -\mathrm{i}$ n'a pas de solution, donc $y \neq -1$.

On a donc $f(z) = yi \iff -\mathrm{i} + \dfrac{2}{z-\mathrm{i}} =$

$y\mathrm{i} \iff \dfrac{2}{z-\mathrm{i}} = (y+1)\mathrm{i} \iff \dfrac{-2\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} =$

$y+1 \iff z - \mathrm{i} = \dfrac{-2\mathrm{i}}{y+1} \iff z =$

$\mathrm{i} - \dfrac{2\mathrm{i}}{y+1} \iff z = \mathrm{i}\left(1 - \dfrac{2}{y+1}\right) \iff z =$

$\dfrac{y+1-2}{y+1}\mathrm{i} \iff z = \left(\dfrac{y-1}{y+1}\right)$.

Conclusion si z est un imaginaire pur (excepté $z = \mathrm{i}$ et $z = -\mathrm{i}$ affixes de A et B), $f(z)$ l'est aussi.

Conclusion : l'ensemble des points, cherché est donc l'axe des ordonnées privé des points A et B.

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. a. $168 = 3 \times 56 = 3 \times 8 \times 7 = 2^3 \times 3 \times 7$;

$20 = 4 \times 5 = 2^2 \times 5$: le PGCD des nombres 168 et 20 est donc : $2^2 = 4$.

b. D'après la question précédente 168 et 20 sont des multiples de 4, donc $168x$, $20y$ et leur somme $168x + 20y$ sont des multiples de 4; comme 6 ne l'est pas cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

c. Pour les mêmes raisons $168x+20y$ et 4 sont des multiples de 4; l'équation peut donc s'écrire en simplifiant par 4 :

$42x+5y=1$; comme 42 et 5 sont premiers entre eux le théorème de Bezout assure que l'équation admet au moins une solution

2. **a.** On a $42=5\times 8+2 \iff 2=42-5\times 8$ et

$5=2\times 2+1 \iff 1=5-2\times 2$.

En utilisant le premier résultat, on obtient :

$1=5-2(42-5\times 8) \iff 1=1=5-2\times 42+16\times 5$ et enfin

$$(-2)\times 42+17\times 5=1. \quad (1)$$

Le couple $(-2\ ;\ 17)$ est donc solution de l'équation $42m+5p=1$.

b. En multipliant chaque membre de l'égalité (1), on obtient :

$(-4)\times 42+34\times 5=2$, donc le couple $(-4\ ;\ 34)$ est solution de l'équation $42u+5v=2$

c. On a vu que :

$42\times(-4)+5\times 34=2$, donc si

$42x+5y=2$ par différence membre à membre :

$42(x+4)+5(y-34)=0 \iff 42(x+4)=5(34-y)$ (1)

d. La dernière égalité montre que 5 divise $42(x+4)$, mais comme 5 est premier avec 42, 5 divise $x+4$: il existe donc $k\in\mathbb{Z}$ tel que :

$x+4=5k \iff x=5k-4$.

En remplaçant dans l'équation (1) $x+4$ par $5k$, on obtient :

$42\times 5k=5(34-y) \iff 42k=34-y \iff y=34-42k$.

Donc si $(x\ ;\ y)$ est un couple solution il existe un entier k tel que $x=5k-4$ et $y=34-42k$.

Réciproquement si on considère un couple $(5k-4\ ;\ 34-42k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$, alors :

$42(x+4)=42\times 5k$ ry $5(34-y)=5\times 42k$, donc ce couple est bien solution de l'équation $42(x+4)=5(34-y)$

Les couples solutions sont de la forme $(5k-4\ ;\ 34-42k)$, $k\in\mathbb{Z}$.

3. x et y étant des entiers les nombres $a=42x+5y-3$ et $b=42x+5y+3$ sont ,eux aussi des entiers, avec de façon évidente $a<b$.

Il faut donc trouver deux entiers a et b tels que $ab=-5$. avec $a<b$; il y a deux possibilités :

- $a=-1$ et $b=5$. Il faut donc résoudre le système :

$\left\{\begin{array}{lcl} 42x+5y-3 & = & -1 \\ 42x+5y+3 & = & 5 \end{array}\right. \Rightarrow 42x+5y=2$ équation résolue à la question précédente;

- $a=-5$ et $b=1$. Il faut donc résoudre le système :

$\left\{\begin{array}{lcl} 42x+5y-3 & = & -5 \\ 42x+5y+3 & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow 42x+5y=-2, \iff 42\times(-x)+5\times(-2)=2$: le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de cette équation si le couple $(-x\ ;\ -y)$ est solution de l'équation précédente$42x+5y=2$.

Conclusion : les couples solutions sont les couples de la forme

$$(5k-4\ ;\ 34-42k),\ \text{et}\ (-5k+4\ ;\ -34+42k),\ k\in\mathbb{Z}$$

Problème **9 points**

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\mathscr{R}=\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\left(x^2-3x+1\right)\mathrm{e}^x.$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\mathscr{R}$.

1. • Limite en plus l'infini :

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2-3x+1=+\infty$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x}=+\infty$, donc par produit de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

• Limite en moins l'infini :

On a $f(x)=x^2\,\mathrm{e}^{x}-3x\,\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}$; or on sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n\,\mathrm{e}^{x}=0$ quel que soit $n\mathbb{N}$, donc par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$: l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de moins l'infini.

2. **a.** f produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ l'est sur le même intervalle et :

$f'(x)=(2x-3)\,\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}\left(x^2-3x+1\right)=\mathrm{e}^{x}\left(x^2-x-2\right)$.

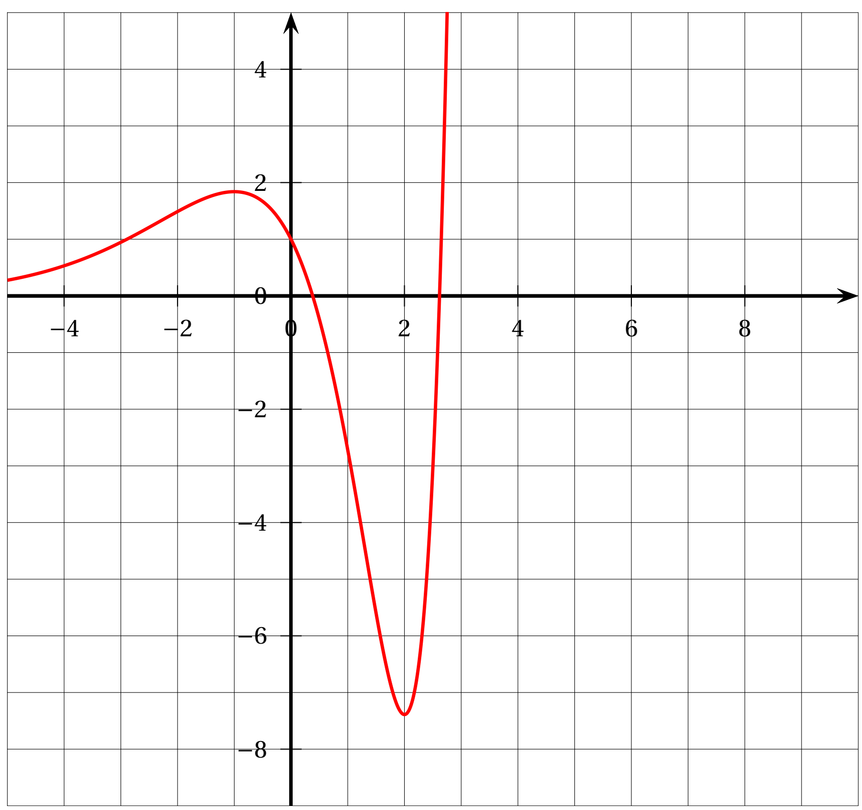
Comme $\mathrm{e}^{x}>0$ quel que soit $x\in\mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme x^2-x-2 : 2 et par suite -1 sont les racines évidentes de ce trinôme ; on sait que ce trinôme est positif sauf sur l'intervalle $]-1\,;\,2[$.

La fonction f est donc croissante sauf sur l'intervalle $]-)1\,;\,2[$ où elle est décroissante.

Avec $f(-1)=5\,\mathrm{e}^{-1}\approx 1{,}84$ et $f(2)=-\mathrm{e}^{2}\approx -7{,}39$ on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$							
f	0	$\nearrow$	$-5\,\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

b.



3. Soit

$$\mathrm{I}=\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

a. Sur l'intervalle $[-3~;~0]$, la fonction f est positive, donc I est l'aire de la surface limitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = -3$ et $x = 0$. (surface hachurée sur la figure ci-dessus).

b. Avec $\left\{\begin{array}{l l} u(x) = x & v'(x) = \text{e}^{\,x}\\ u'(x) = 1 & v(x) = \text{e}^{\,x}\end{array}\right.$ on obtient par intégration par parties :

$\displaystyle\int_{-3}^{0} x\text{e}^{x}\,\text{d}x = \left[x\,\text{e}^{\,x}\right]_{-3}^{0} - \int_{-3}^{0} 1\,\text{e}^{\,x}\,\text{d}x = \left[x\,\text{e}^{\,x}\right]_{-3}^{0} - \left[\text{e}^{\,x}\right]_{-3}^{0} = \left[\text{e}^{\,x}(x-1)\right]_{-3}^{0} = -1+4\,\text{e}^{\,-3}$

De même avec $\left\{\begin{array}{l l} u(x) = x^2 & v'(x) = \text{e}^{\,x}\\ u'(x) = 2x & v(x) = \text{e}^{\,x}\end{array}\right.$ on obtient par intégration par parties :

$\displaystyle\int_{-3}^{0} x^2\text{e}^{x}\,\text{d}x = \left[x^2\,\text{e}^{\,x}\right]_{-3}^{0} - 2\int_{-3}^{0} 2x\,\text{e}^{\,x}\,\text{d}x = 0 - 9\,\text{e}^{\,-3} - 2\left(-1+4\,\text{e}^{\,-3}\right) = -9\,\text{e}^{\,-3} + 2 - 8\,\text{e}^{\,-3} =$ $2 - 17\,\text{e}^{\,-3}$

c. $I = \displaystyle\int_{-3}^{0}\left(x^2-3x+1\right)\text{e}^{x}\,\text{d}x = \int_{-3}^{0} x^2\text{e}^{x}\,\text{d}x - 3\int_{-3}^{0} x\text{e}^{x}\,\text{d}x + \int_{-3}^{0}\text{e}^{x}\,\text{d}x = 2-17\,\text{e}^{\,-3} - 3\left(-1+4\,\text{e}^{\,-3}\right) +$ $1-\text{e}^{\,-3} = 2-17\,\text{e}^{\,-3}+3-12\,\text{e}^{\,-3}+1-\text{e}^{\,-3} = 6-30\,\text{e}^{\,-3} \approx 4,506$.

Partie B

1.

$$g\,(x) = \text{e}^{\left(x^2+ax+b\right)}.$$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'\,(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\text{e}^{-\frac{5}{4}}$	$\nearrow$	$+\infty$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$g'(x) = (2x+a)\,\text{e}^{\,x^2+ax+b}$:

• On lit $g'\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \iff (3+a)\,\text{e}^{\,\cdots} = 0 \iff 3+a = 0$ (car $\text{e}^{\,\cdots} > 0$) donc $a = -3$.

• On lit aussi $g\left(\frac{3}{2}\right) = \text{e}^{\,-\frac{5}{4}} \iff \text{e}^{\,\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+b} = \text{e}^{\,-\frac{5}{4}} \iff \text{e}^{\,-\frac{9}{4}+b} = \text{e}^{\,-\frac{5}{4}} \iff -\frac{9}{4}+b = -\frac{5}{4} \iff b = 1$.

La fonction g est donc la fonction h ci-dessous.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h\,(x) = \text{e}^{\left(x^2-3x+1\right)}$$

et Γ sa courbe représentative dans le repère $\mathscr{R}$.

a. Soit un point M de Γ d'abscisse X et son symétrique M' autour de la droite (D) d'équation $x = \dfrac{3}{2}$. M' a donc pour abscisse $3-X$.

On a $h(X) = \text{e}^{\,X^2-3X+1}$ et $h(3-X) = \text{e}^{\,9+X^2-6X-9+3X+1} = \text{e}^{\,X^2-3X+1} = h(X)$, ce qui prouve que la droite D d'équation $x = \dfrac{3}{2}$ est axe de symétrie de Γ.

b. Le tableau de variations ci-dessus est celui de la fonction h, donc la fonction h est strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2}~;~+\infty\right[$ de $\text{e}^{\,-\frac{5}{4}} \approx 0,287$ à plus l'infini.

La fonction h étant continue car dérivable sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2}~;~+\infty\right[$ il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel unique $\beta \in \left[\frac{3}{2}~;~+\infty\right]$ tel que $h(\beta) = 5$.

La calculatrice donne $h(3) \approx 2,7$ et $h(4) \approx 148$, donc $3 < \beta < 4$, puis

$h(3,1) \approx 2,7$ et $h(3,3) \approx 7,3$, donc $3,2 < \beta < 3,3$: « 3,2 est une valeur approchée à 10^{-1} près d'une solution de l'équation $h(x) = 5$ »

c. On a donc $1,7 < \alpha < 1,8$: par croissance de h sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2}~;~+\infty\right[$, on a $h(1,7) < h(\alpha) < h(2,2)$, soit $0,30 < h(\alpha) < 0,32$.

Partie C

Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous (a, b et c étant trois nombres réels).

x	$-\infty$	0	a	b	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	↘	c	↗ 0 ↗	$+\infty$

Soit v_1, v_2, v_3 les fonctions définies par :

$$v_1(x) = \mathrm{e}^{u(x)} \qquad v_2(x) = u\left(\mathrm{e}^x\right) \qquad v_3(x) = u(x)\mathrm{e}^x.$$

1. les fonctions u et $\mathrm{e}^{\,x}$ étant dérivables sur $\mathbb{R}$, les fonctions v_1, v_2 et v_3 dont dérivables sur $\mathbb{R}$.

• On a pour tout réel x, $\;v_1'(x) = u'(x)\,\mathrm{e}^{\,u(x)}$.

Comme u est décroissante sur $]-\infty\,;\,a]$, $u'(x) \leqslant 0,$; donc sur cet intervalle $v'(x) \leqslant 0$: la fonction est décroissante.

Sur $[0\,;\,+\infty[$, $\;u$ est croissante , donc $u'(x) \geqslant 0$ et par produit $v_1'(x) \geqslant 0$: la fonction v_1 est croissante sur $[a\,;\,+\infty[$.

• On a pour tout réel x, $\;v_2'(x) = u'(x)\left(\mathrm{e}^{\,u(x)}\right) \times \mathrm{e}^{\,x}$.

Comme quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\,u(x)}$ et $\mathrm{e}^{\,x}$ sont supérieurs à 0, le signe de $v_2'(x)$ est celui de $u'(x)$: la fonction v_2' est donc décroissante puis croissante.

2. On a pour tout réel :

$v_3'(x) = u(\S x)\,\mathrm{e}^{\,x} + u(x)\,\mathrm{e}^{\,x} = \,\mathrm{e}^{\,x}[u'(x) + u(x)]$.

Le signe de $v_3'(x)$ est donc celui de la somme $u'(x) + u(x)$.

On ne peut être certain du signe de cette somme que sur l'intervalle $[b\,;\,+\infty]$:

• sur cet intervalle la fonction est croissante et $u(b) = 0$, donc $u(x) \geqslant 0$ sur $[b\,;\,+\infty]$;

• sur cet intervalle la fonction u est croissante, donc $u'(x) \geqslant 0$.