Corrigé du Baccalauréat Polynésie

Sujet 1 - 2 septembre 2025

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1 — 5 points

En France il y a deux formules pour obtenir le permis de conduire :

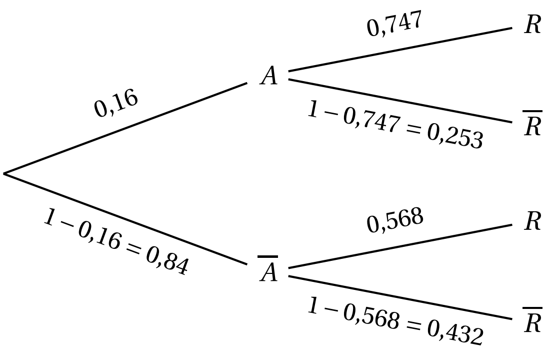
- Suivre à partir de 15 ans une formation de conduite accompagnée pendant 2 ans;
- Suivre la formation classique (sans conduite accompagnée) à partir de 17 ans.

En France actuellement, parmi les jeunes qui suivent une formation au permis de conduire, 16 % choisissent la formation de conduite accompagnée, et parmi eux, 74,7 % réussissent l'examen de conduite dès leur première tentative. En suivant la formation classique, le taux de réussite dès la première tentative est seulement de 56,8 %. On choisit au hasard un jeune français qui a déjà passé l'examen de conduite et on considère les évènements A et R suivants :

- A : « le jeune a suivi la formation de conduite accompagnée »;
- R : « le jeune a eu le permis dès sa première tentative ».

Partie A

1. On dresse un arbre de probabilités modélisant cette situation.



2. **a.** D'après la loi des probabilités totales :

$$P(R) = P(A \cap R) + P\left(\overline{A} \cap R\right) = P(A) \times P_A(R) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(R)$$

$$= 0{,}16 \times 0{,}747 + 0{,}84 \times 0{,}568 = 0{,}119\,52 + 0{,}477\,12$$

$$= 0{,}596\,64$$

Dans la suite, on gardera la valeur 0,597 arrondie à 10^{-3} près.

b. Une probabilité de 0,597 correspond à un pourcentage de 59,7 %.

Le pourcentage de réussite lors du premier passage du permis est de 59,7 %, quel que soit le mode d'apprentissage.

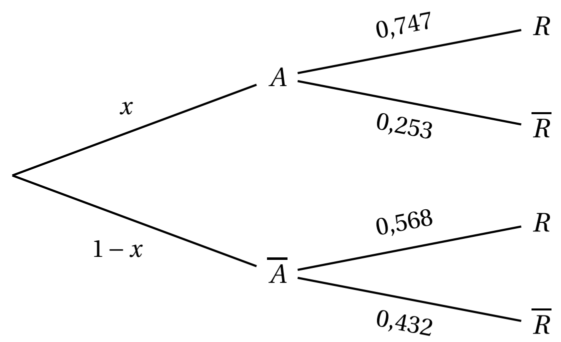
3. On choisit un jeune ayant eu son permis dès sa première tentative.

La probabilité qu'il ait suivi la formation de conduite accompagnée est :

$P_R(A) = \dfrac{P(A \cap R)}{P(R)} \approx \dfrac{0{,}16 \times 0{,}747}{0{,}597} \approx 0{,}200$

4. On cherche la proportion x de jeunes suivant la formation de conduite accompagnée pour que le taux de réussite global (quelle que soit la formation choisie) dès la première tentative à l'examen de conduite dépasse 70 %.

L'arbre précédent devient :



Le taux de réussite devient alors :

$P(R) = x \times 0{,}747 + (1-x) \times 0{,}568 = 0{,}747x + 0{,}568 - 0{,}568x = 0{,}179x + 0{,}568$

$P(R) > 0{,}70 \iff 0{,}179x + 0{,}568 > 0{,}7 \iff 0{,}179x > 0{,}132 \iff x > \dfrac{0{,}132}{0{,}179}$

Or $\dfrac{0{,}132}{0{,}179} \approx 0{,}737$.

Il faudrait donc qu'au moins 73,7 % des jeunes choisissent la conduite accompagnée pour dépasser un taux de réussite de 70 %.

Partie B

Une auto-école présente pour la première fois à l'examen de conduite 10 candidats qui ont suivi la formation de conduite accompagnée. On modélise le fait de passer les examens de conduite par des épreuves aléatoires indépendantes.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces 10 candidats qui auront leur permis dès la première tentative.

1. L'expérience élémentaire consiste à choisir un candidat ; il y a deux possibilités : il est reçu, avec une probabilité $p = 0{,}747$, ou il ne l'est pas.

On réalise 10 fois cette expérience et on suppose que les épreuves aléatoires sont indépendantes.

Donc la variable aléatoire X donnant le nombre de ces 10 candidats qui auront leur permis dès la première tentative suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}747$.

2. $P(X \geqslant 6) = 1 - P(X \leqslant 5)$

   À la calculatrice on trouve $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}082$ donc $P(X \geqslant 6) \approx 0{,}918$.

   On peut donc estimer à 91,8 % le pourcentage de chances que sur 10 candidats, au moins 6 obtiennent le permis dès leur première tentative.
3. $E(X) = np = 10 \times 0{,}747 = 7{,}47$ et $V(X) = np\left(1-p\right) = 10 \times 0{,}747 \times 0{,}253 \approx 1{,}890$
4. Il y a aussi 40 candidats qui n'ont pas suivi la formation de conduite accompagnée et qui se présentent pour la première fois à l'examen de conduite. De la même manière, on note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de ces candidats qui auront le permis à la première tentative. On admet que Y est indépendante de la variable X et qu'en fait $E(Y) = 22{,}53$ et $V(Y) = 9{,}81$.

   On note alors Z la variable aléatoire comptant le nombre total de candidats (parmi les 50) qui auront le permis de conduire dès la première tentative.

   a. D'après le texte : $Z = X + Y$

   D'après la linéarité de l'espérance : $E(Z) = E(X) + E(Y) = 7{,}47 + 22{,}53 = 30$.

   Les variables X et Y sont indépendantes, donc on peut utiliser l'additivité de la variance : $V(Z) = V(X) + V(Y) \approx 1{,}89 + 9{,}81 = 11{,}7$.

   b. La variable aléatoire Z a pour espérance $E(Z)$ et pour variance $V(Z)$ donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

   pour tout $\delta \in \left]0\,;\,+\infty\right[$, $P\left(\left|Z - E(Z)\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{V(Z)}{\delta^2}$.

   $E(Z) = 30$ et $V(Z) = 11{,}7$ donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev devient :

   pour tout $\delta \in \left]0\,;\,+\infty\right[$, $P\left(\left|Z - 30\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{11{,}7}{\delta^2}$.

   On cherche la probabilité qu'il y ait moins de 20 ou plus de 40 candidats reçus.

   $Z \leqslant 20 \iff Z - 30 \leqslant -10$ et $Z \geqslant 40 \iff Z - 30 \geqslant 10$

   $\big((Z-30 \leqslant -10)$ ou $(Z - 30 \geqslant 10)\big) \iff \left|Z - 30\right| \geqslant 10$

   Pour $\delta = 10$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev devient :

   $P\left(\left|Z - 30\right| \geqslant 10\right) \leqslant \dfrac{11{,}7}{10^2}$ donc $P\left(\left|Z - 30\right| \geqslant 10\right) \leqslant 0{,}117$

   donc la probabilité qu'il y ait moins de 20 ou plus de 40 candidats qui aient leur permis dès la première tentative est inférieure à 0,12.

Exercice 2 (5 points)

On étudie l'évolution de la population d'une espèce animale au sein d'une réserve naturelle. Les effectifs de cette population ont été recensés à différentes années. Les données collectées sont présentées dans le tableau suivant :

Année	2000	2005	2010	2015
Nombre d'individus	50	64	80	100

Pour anticiper l'évolution de cette population, la direction de la réserve a choisi de modéliser le nombre d'individus en fonction du temps. Pour cela, elle utilise une fonction, définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, dont la variable x représente le temps écoulé, en année, à partir de l'année 2000. Dans son modèle, l'image de 0 par cette fonction vaut 50, ce qui correspond au nombre d'individus en l'an 2000.

Partie A. Modèle 1

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante : $y' = 0{,}05y - 0{,}5 \quad (E_1)$

1. On résout l'équation différentielle (E_1) avec la condition initiale $y(0) = 50$.

- L'équation différentielle $y = ay$ a pour solutions les fonctions y vérifiant $y(x) = C\,\mathrm{e}^{ax}$ où C est un réel quelconque.

  Donc l'équation différentielle $y = 0{,}05y$ a pour solutions les fonctions y vérifiant $y(x) = C\,\mathrm{e}^{0{,}05x}$ où C est un réel quelconque.
- On cherche une solution particulière constante k à l'équation (E_1).

  On a donc $0 = 0{,}05k - 0{,}5$ donc $k = 10$.
- Les solutions de l'équation (E_1) sont donc les fonctions y définies par $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-0{,}05x} + 10$ où $C \in \mathbb{R}$.
- On cherche la solution vérifiant la condition initiale $y(0) = 50$.

  On a donc $C\,\mathrm{e}^{0} + 10 = 50$ donc $C = 40$.

La solution de l'équation différentielle (E_1) vérifiant $y(0) = 50$ est la fonction y définie par $y(x) = 40\,\mathrm{e}^{0{,}05x} + 10$.

2. On compare les résultats du tableau avec ceux que l'on obtiendrait avec ce modèle.

Année	2000	2005	2010	2015
Nombre d'individus	50	64	80	100
x	0	5	10	15
$y(x)$	50	61,36	75,95	94,68

Partie B. Modèle 2

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante : $y' = 0{,}05y\left(1 - 0{,}00125y\right) \quad (E_2)$.

On note f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{800}{1 + 15\,\mathrm{e}^{-0{,}05x}}$,

et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants.

	Instruction	Résultat
1	$f(x) := \dfrac{800}{1+15\,\mathrm{e}^{-0,05x}}$	$f(x) = \dfrac{800}{1+15\,\mathrm{e}^{-0,05x}}$
2	$f'(x) :=$ Dérivée $(f(x))$	$f'(x) = \dfrac{600\,\mathrm{e}^{-0,05x}}{\left(1+15\,\mathrm{e}^{-0,05x}\right)^2}$
3	$f''(x) :=$ Dérivée ($f'(x)$)	$f''(x) = \dfrac{30\,\mathrm{e}^{-0,05x}}{\left(1+15\,\mathrm{e}^{-0,05x}\right)^3}\left(15\,\mathrm{e}^{-0,05x}-1\right)$
4	Résoudre ($15\,\mathrm{e}^{-0,05x}-1 \geqslant 0$)	$x \leqslant 20\ln(15)$

1. On a d'une part : $f(0) = \dfrac{800}{1+15\,\mathrm{e}^{0}} = \dfrac{800}{16} = 50$

D'autre part :

- $0,05f(x) = \dfrac{0,05\times 800}{1+15\,\mathrm{e}^{-0,05x}} = \dfrac{40}{1+15\,\mathrm{e}^{-0,05x}}$
- $0,001\,25f(x) = \dfrac{0,001\,25\times 800}{1+15\,\mathrm{e}^{-0,05x}} = \dfrac{1}{1+15\,\mathrm{e}^{-0,05x}}$
- $1-0,001\,25f(x) = 1-\dfrac{1}{1+15\,\mathrm{e}^{-0,05x}} = \dfrac{1+15\,\mathrm{e}^{-0,05x}-1}{1+15\,\mathrm{e}^{-0,05x}} = \dfrac{15\,\mathrm{e}^{-0,05x}}{1+15\,\mathrm{e}^{-0,05x}}$
- $0,05f(x)\left(1-0,001\,25f(x)\right) = \dfrac{40}{1+15\,\mathrm{e}^{-0,05x}} \times \dfrac{15\,\mathrm{e}^{-0,05x}}{1+15\,\mathrm{e}^{-0,05x}} = \dfrac{40\times 15\,\mathrm{e}^{-0,05x}}{\left(1+15\,\mathrm{e}^{-0,05x}\right)^2}$

$$= \dfrac{600\,\mathrm{e}^{-0,05x}}{\left(1+15\,\mathrm{e}^{-0,05x}\right)^2} = f'(x) \text{ d'après le tableau}$$

On admet que cette fonction f est l'unique solution de (E_2) prenant la valeur initiale de 50 en 0.

2. Avec ce nouveau modèle f, l'effectif de cette population en 2050 peut être estimé à $f(50)$ soit environ 358.

3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -0,05x = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,05x} = 0$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+15\,\mathrm{e}^{-0,05x} = 1$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{800}{1+15\,\mathrm{e}^{-0,05x}} = 800$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 800$, ce qui prouve que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $y = 800$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

4. Sur $[0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{600\,\mathrm{e}^{-0,05x}}{\left(1+15\,\mathrm{e}^{-0,05x}\right)^2}$.

Or pour tout réel X, on sait que $\mathrm{e}^{X} > 0$, donc $\mathrm{e}^{-0,05x} > 0$ pour tout x.

$\left(1+15\,\mathrm{e}^{-0,05x}\right)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$.

On en conclut que la fonction f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

5. On résout l'inéquation $15\,\mathrm{e}^{-0,05x}-1 \geqslant 0$.

$15\,\mathrm{e}^{-0,05x}-1 \geqslant 0 \iff 15\,\mathrm{e}^{-0,05x} \geqslant 1 \iff \mathrm{e}^{-0,05x} \geqslant \dfrac{1}{15} \iff -0,05x \geqslant \ln\left(\dfrac{1}{15}\right)$

$$\iff x \leqslant \dfrac{\ln\left(\frac{1}{15}\right)}{-0,05} \iff x \leqslant \dfrac{-\ln(15)}{-0,05} \iff x \leqslant 20\ln(15)$$

6. On admet que la vitesse de croissance de la population de cette espèce, exprimée en nombre d'individus par an, est modélisée par la fonction f'.

a. Pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on détermine le signe de la dérivée seconde $f''(x)$.

D'après le tableau : $f''(x) = \dfrac{30\,\mathrm{e}^{-0,05x}}{\left(1+15\,\mathrm{e}^{-0,05x}\right)^3}\left(15\,\mathrm{e}^{-0,05x}-1\right)$.

D'après ce qui a été vu précédemment, $f''(x)$ est du signe de $\left(15\,\mathrm{e}^{-0,05x}-1\right)$.

x	0		$20\ln(15)$		$+\infty$
$15\,\mathrm{e}^{-0,05x}-1$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
		f convexe		f concave	

En $x = 20\ln(15)$, $f''(x)$ s'annule et change de signe, donc la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion.

Si $x = 20\ln(15)$, $15\,\mathrm{e}^{-0,05x}-1=0$ donc $15\,\mathrm{e}^{-0,05\times 20\ln(15)}=1$

$f(20\ln(15)) = \dfrac{800}{1+15\,\mathrm{e}^{-0,05\times 20\ln(15)}} = \dfrac{800}{1+1} = 400$

Donc le point de coordonnées $(20\ln(15)\,,400)$ est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.

b. La direction de la réserve affirme : « Au vu de ce modèle, la vitesse de croissance de la population de cette espèce va augmenter pendant un peu plus de cinquante ans, puis va diminuer ».

On établit le tableau de variations de la fonction f' qui modélise la vitesse de croissance de la population de cette espèce, exprimée en nombre d'individus par an.

x	0		$20\ln(15)$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
f'		$\nearrow$		$\searrow$	

Or $20\ln(15) \approx 54{,}2$ donc la direction a raison.

Exercice 3 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout n : $u_{n+1} = 2+\ln\left(u_n^2-3\right)$

Partie A : Exploitation de programmes Python

1. On complète le script Python ci-dessous pour que `suite(k)` renvoie la liste des k premières valeurs de la suite (u_n).

```
def suite(k):
  L = []
  u = 5
  for i in range(k):
    L.append(u)
    u = 2 + log( u**2 - 3
  return(L)
```

2. On a exécuté `suite(9)` ci-dessous.

```
>>> suite(9)
[ 5, 5.091042453358316, 5.131953749864703,
5.150037910978289, 5.157974010229213, 5.1614456706362954,
5.162962248594583, 5.163624356938671, 5.163913344065642]
```

La suite (u_n) semble croissante, mais on ne peut pas se prononcer sur sa limite.

3. On a ensuite créé la fonction `mystere(n)` donnée ci-dessous et exécuté `mystere(10000)`, ce qui a renvoyé 1.

```
def mystere(n):
  L = suite(n)
  c = 1
  for i in range(n - 1):
    if L[i] > L[i + 1]:
      c = 0
  return c
```

La fonction `mystere` renvoie 0 s'il existe un indice i pour lequel `L[i] > L[i+1]`, c'est-à-dire $u_n > u_{n+1}$. Comme `mystere(10000)` renvoie 1, cela veut dire que pour tout $i \leqslant 9999$, on a : $u_i \leqslant u_{i+1}$.

Cela ne contredit pas la conjecture faite sur la croissance de la suite (u_n).

Partie B : Étude de la convergence de la suite (u_n)

On considère la fonction g définie sur $[2\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = 2 + \ln\left(x^2 - 3\right)$.

1. $g'(x) = 0 + \dfrac{2x}{x^2-3} = \dfrac{2x}{x^2-3}$

Sur $[2\,;\,+\infty[$, $2x > 0$ et $x^2 > 4$ donc $x^2 - 3 > 1 > 0$; donc $g'(x) >$ sur $[2\,;\,+\infty[$, ce qui prouve que la fonction g est croissante sur $[2\,;\,+\infty[$.

2. **a.** On démontre par récurrence que la propriété $4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation**

  $u_0 = 5$ et $u_1 = 2 + \ln\left(5^2 - 3\right) = 2 + \ln(22) \approx 5{,}09$

  Donc $4 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 6$; la propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire $4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$.

  D'après la définition de la fonction g, on a $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout n.

  On sait que la fonction g est croissante sur $[2~;~+\infty[$; donc de l'inégalité $4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$, on déduit $g(4) \leqslant g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) \leqslant g(6)$.

  $g(4) \approx 4{,}56$; $g(u_n) = u_{n+1}$; $g(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $g(6) \approx 5{,}5$

  On a donc $4{,}5 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 5{,}5$, ce qui entraine $4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 6$.

  La propriété est donc héréditaire.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$ donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout n : $4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$.

b. D'après la question précédente, pour tout n, on a :

- $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante;
- $u_n \leqslant 6$ donc la suite (u_n) est majorée.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, elle est convergente.

Partie C : Étude de la valeur de la limite

On considère la fonction f définie sur $[\,2\,;\,+\infty\,[$ par : $f(x) = 2 + \ln\left(x^2 - 3\right) - x$.

On donne le tableau de variations de f suivant.

x	2		3		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	$\ln(6)-1$	↘	$-\infty$

1. **a.** D'après le tableau de variations de f, on voit que $f(2) = 0$.
On complète le tableau :

x	2		3		β		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	$\ln(6)-1$	↘	0	↘	$-\infty$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[2~;~+\infty[$ que l'on notera $\alpha = 2$ et $\beta \in [3\,;+\infty[$

b. On a vu que $\alpha = 2$.

À la calculatrice, on trouve successivement :

- $f(5) < 0 < f(6)$ donc $\beta \in [5\,;6]$;
- $f(5{,}1) < 0 < f(5;2)$ donc $\beta \in [5{,}1\,;5{,}2]$;
- $f(5{,}16) < 0 < f(5;17)$ donc $\beta \in [5{,}16\,;5{,}17]$;
- $f(5{,}164) < 0 < f(5;165)$ donc $\beta \in [5{,}164\,;5{,}165]$.

Donc 5,164 une valeur approchée à 10^{-3} près de β.

2. On note ℓ la limite de la suite (u_n).

$f(x) = g(x) - x$ donc $g(x) = x \iff f(x) = 0$

Pour tout n, on a $g(u_n) = u_{n+1}$ donc, par passage à la limite on a $g(\ell) = \ell$, ce qui équivaut à $f(\ell) = 0$.

$u_0 = 5$ et la suite (u_n) est croissante donc $\ell \geqslant 5$.

$\ell \geqslant 5$ et ℓ vérifie $f(\ell) = 0$; d'après les questions précédentes, on peut en déduire que $\ell = \beta$.

Exercice 4 (5 points)

1. On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x\ln(x)$.

Affirmation 1 : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$

On calcule $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\,\mathrm{d}x$ en faisant une intégration par parties :

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} u'(x) = x & \Longrightarrow & u(x) = \dfrac{x^2}{2} \\ v(x) = \ln(x) & \Longrightarrow & v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\times\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\times\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}}\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\times\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{\mathrm{e}} = \left[\frac{\mathrm{e}^2}{2}\times\ln(\mathrm{e}) - \frac{1^2}{2}\times\ln(1)\right] - \left[\frac{\mathrm{e}^2}{4} - \frac{1^2}{4}\right] \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - 0 - \frac{\mathrm{e}^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\mathrm{e}^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}\end{aligned}$$

Affirmation 1 vraie

2. Soient n et k deux entiers naturels non nuls tels que $k \leqslant n$.

Affirmation 2 : $n \times \dbinom{n-1}{k-1} = k \times \dbinom{n}{k}$

On va utiliser les propriétés : $\dfrac{k}{k!} = \dfrac{1}{(k-1)!}$ et $n! = n \times (n-1)!$.

- $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \times (n-k)!}$ donc

$$k \times \binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!\times(n-k)!} = \frac{k\times n!}{k!\times(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\times(n-k)!}$$

- $\displaystyle\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times ((n-1)-(k-1))!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times (n-1-k+1)!}$
$\displaystyle = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times (n-k)!}$ donc
$\displaystyle n \times \binom{n-1}{k-1} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times (n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)! \times (n-k)!} == \frac{n!}{(k-1)! \times (n-k)!}$

Affirmation 2 vraie

3. Pour les trois affirmations suivantes, on considère que l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Soit d la droite de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t+1 \\ y &=& 2t+1 \\ z &=& -t \end{array}\right., \quad t \in \mathbb{R}$.

Soit d' la droite de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t'-1 \\ y &=& -t'+2 \\ z &=& t'+1 \end{array}\right., \quad t' \in \mathbb{R}$.

Soit P le plan d'équation cartésienne : $2x + y - 2z + 18 = 0$.

Soit A le point de coordonnées $(-1 ; -3 ; 2)$ et B le point de coordonnées $(-5 ; -5 ; 6)$.

On appelle plan médiateur du segment [AB] le plan passant par le milieu du segment [AB] et orthogonal à la droite (AB).

Affirmation 3 : Le point A appartient à la droite d.

$A \in d$ si et seulement s'il existe un réel t tel que : $\left\{\begin{array}{lcl} -1 &=& t+1 \\ -3 &=& 2t+1 \\ 2 &=& -t \end{array}\right.$

Le réel $t = -2$ vérifie les trois égalités donc le point A appartient à la droite d.

Affirmation 3 vraie

Affirmation 4 : Les droites d et d' sont sécantes.

d et d' sont sécantes s'il existe un couple (t, t') tel que $\left\{\begin{array}{lcl} t+1 &=& 2t'-1 \\ 2t+1 &=& -t'+2 \\ -t &=& t'+1 \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{lcl} t+1 &=& 2t'-1 \\ 2t+1 &=& -t'+2 \\ -t &=& t'+1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t &=& 2t'-2 \\ 2(2t'-2)+1 &=& -t'+2 \\ -(2t'-2) &=& t'+1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} t &=& 2t'-2 \\ 4t'-4+1 &=& -t'+2 \\ -2t'+2 &=& t'+1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t &=& 2t'-2 \\ 5t' &=& 5 \\ 1 &=& 3t' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t &=& 2t'-2 \\ t' &=& 1 \\ \frac{1}{3} &=& t' \end{array}\right.$$

Le système n'a pas de solution donc les droites d et d' ne sont pas sécantes.

Affirmation 4 fausse

Affirmation 5 : Le plan P est le plan médiateur du segment [AB].

Le plan médiateur du segment [AB] est l'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que MA = MB, ce qui équivaut à $\text{MA}^2 = \text{MB}^2$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{MA}^2 &= (x+1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2\\
&= x^2+2x+1+y^2+6y+9+z^2-4z+4\\
&= x^2+2x+y^2+6y+z^2-4z+14
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{MB}^2 &= (x+5)^2+(y+5)^2+(z-6)^2\\
&= x^2+10x+25+y^2+10y+25+z^2-12z+36\\
&= x^2+10x+y^2+10y+z^2-12z+86
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{MA}^2=\mathrm{MB}^2 &\iff x^2+2x+y^2+6y+z^2-4z+14 = x^2+10x+y^2+10y+z^2-12z+86\\
&\iff -8x-4y+8z-72=0 \iff -4\left(2x+y-2z+18\right)=0\\
&\iff 2x+y-2z+18=0
\end{aligned}$$

On retrouve l'équation du plan P donc P est le plan médiateur du segment [AB].

Affirmation 5 vraie