

œ Épreuve anticipée de Première Spécialité mathématiques œ
Voie générale (sujet de secours) – Métropole – 12 juin 2026

A. P. M. E. P.

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES – QCM (6 pts)

Pour cette première partie, aucune justification n'est demandée et une seule réponse est possible par question. Pour chaque question, reportez son numéro sur votre copie et indiquez votre réponse.

Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève aucun point.

Question 1

Si $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}$ alors $\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{f} = \frac{f+p}{pf}$ et en prenant les inverses $p' = \frac{pf}{f+p}$.

Question 2

$$\frac{2^5 \times 2^3}{2^7} = \frac{2^{5+3}}{2^7} = \frac{2^8}{2^7} = 2^{8-7} = 2^1 = 2.$$

Question 3

Augmenter de 20 % revient à multiplier par $1 + \frac{20}{100} = 1 + 0,20 = 1,2$.

Le nouveau prix est $80 \times 1,2 = 96$ (€).

Question 4

• Le coefficient directeur de la droite d est égal à la tangente que de l'angle que fait la droite (d) avec l'axe des abscisses soit : $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7-3}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$.

• a étant le coefficient directeur cherché l'équation de d est $M(x; y) \in d \iff y = ax + b$, avec b réel.

Il faut donc résoudre le système

$$\begin{cases} 3 &= 1a + b \\ 7 &= 3a + b \end{cases} \text{ qui donne par différence membres à membres } 4 = 2a \iff 2 = a.$$

Question 5

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 25}{4 \times 25} = \frac{25}{100} = 0,25.$$

Donc un quart de 60 % représente : $0,25 \times 0,60 = 0,15 = \frac{15}{100} = 15\%$.

Question 6

La relation s'écrit : $20 = \frac{t^2}{5}$, d'où par produit par 5 : $100 = t^2$. Cette équation a deux solutions -10 et 10 .

Question 7

• L'ordonnée à l'origine est égale à -1 ;

• En partant du point de la droite de coordonnées $(0; -1)$ on retrouve un point de la droite en se déplaçant de 2 vers la droite et 3 vers le haut : le coefficient directeur est donc égale à $\frac{3}{2}$. L'équation est donc

$$y = \frac{3}{2}x - 1.$$

Question 8

$$\frac{\sqrt{98} + 2\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{49 \times 2} + 2\sqrt{4 \times 2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{49 \times 2} + 2\sqrt{4 \times 2}}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 9.$$

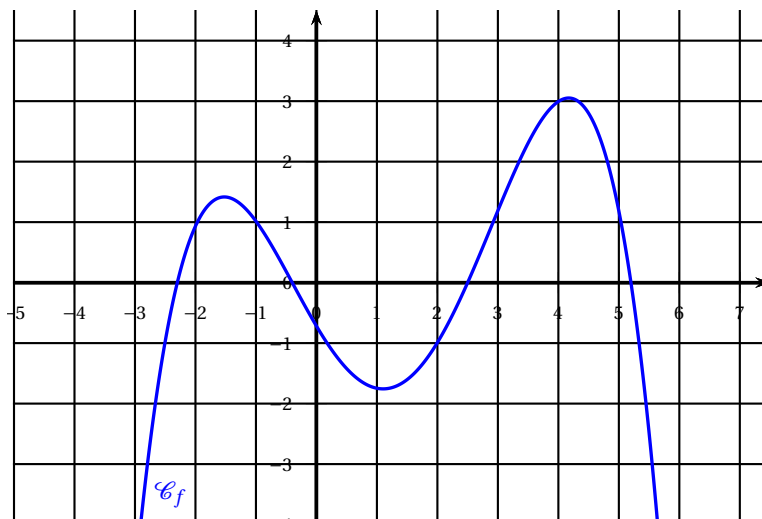
Question 9

Le trinôme s'annule pour $2x - 4 = 0 \iff 2x = 4 \iff x = 2$ ou si $-x + 1 = 0 \iff 1 = x$.

Sous forme développée $f(x) = -2x^2 + \dots$: ce trinôme est du signe de -2 , donc négatif sauf entre ses racines 1 et 2 : tableau **c**.

Question 10

Une fonction f est représentée ci-dessous :



Graphiquement la bonne réponse est **d**.

Question 11

Il y a 30 données ; la 15^e et la 16^e sont égales à 1 : c'est donc la médiane.

Question 12

Réponse **c**. : $(2x - 1)^2 \neq 4x^2 - 1$ (identités $(a - b)^2 \neq a^2 - b^2$).

DEUXIÈME PARTIE (14 pts)

Exercice 1 (6 points)**Partie A : Étude graphique**

- Si $\mathcal{C}$ était la représentation graphique de la fonction f' la positivité de celle-ci sur l'intervalle $[-2 ; 3]$ entraînerait la croissance de f sur cet intervalle : ce qui est faux.
La fonction f est donc représentée par $\mathcal{C}$ et sa dérivée par la courbe $\mathcal{C}'$.
- Une équation de cette tangente est $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.
Or on lit $f(0) = 9$ et $f'(0) = 3$.
Une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est donc $y = 3x + 9$.

$$f(t) = e^t (t^2 - 6t + 9)$$

où t représente le temps écoulé depuis le début de l'observation, exprimé en heure.

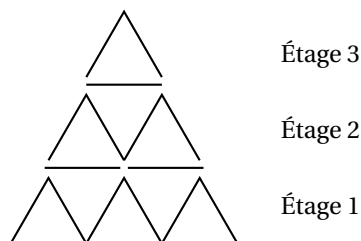
- On a pour tout réel t , $(t - 3)^2 = t^2 - 2 \times 3 \times t + (-3)^2 = t^2 - 6t + 9$, donc $f(t) = e^t (t - 3)^2$.
On sait que pour tout réel t , $e^t > 0$ et que $(t - 3)^2 \geq 0$ donc le produit $e^t (t - 3)^2 \geq 0$.

2. $f(0) = e^0(0-3)^2 = 1 \times (-3)^2 = 9$.
3. La fonction f est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle en dérivant comme un produit :
- $$f'(t) = e^t(t^2 - 6t + 9) + e^t(2t - 6) = e^t(t^2 - 6t + 9 + 2t - 6) = e^t(t^2 - 4t + 3).$$
4. a. On sait que pour tout réel t , $e^t > 0$, le signe de $f'(t)$ est donc celui du trinôme $t^2 - 4t + 3$. Or sur le graphique de l'énoncé on voit que $f'(t)$ s'annule pour $t = 1$ et $t = 3$ effectivement $(t-1)(t-3) = t^2 - 4t + 3$.
Sur le graphique on voit aussi que $f'(t) \geq 0$ sauf sur l'intervalle $]1; 3[$.
On en déduit que la fonction f est croissante sauf sur l'intervalle $]1; 3[$.
- b. On a $f(0) = 9, f(1) = e(1-6+9) = 4e \approx 10,8, f(3) = 0$. D'où le tableau de variations de f :

x	0	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
f	9	e^4	0			

Exercice 2 (4 points)

On considère un château de cartes à N étages, représenté ci-contre dans le cas $N = 3$.
On souhaite déterminer combien de cartes sont nécessaires pour construire un tel château.



1. Il y a N triangles « pointe en haut » à l'étage 1 dans un château à N étages.
2. Il y a en tout $S = 1 + 2 + \dots + N$ triangles « pointe en haut » dans tout le château à N étages. Or $S = 1 + 2 + \dots + N$ ou $S = N + N - 1 + \dots + 1$ et en faisant la somme membres à membres des deux lignes :
 $2S = (N+1) + (N+1) + \dots + (N+1) = N(N+1)$. Finalement il y a $\frac{N(N+1)}{2}$ triangles « pointe en haut » dans tout le château à N étages
3. • Les triangles « pointe en haut » dans tout le château à N étages contiennent $2 \times \frac{N(N+1)}{2} = N(N+1)$ cartes ;
• Les cartes horizontales nécessaires sont en nombre égal à :
 $1 + 2 + \dots + N - 1 = \frac{N(N-1)}{2}$.
Il faut donc pour un château à N étages :
$$N(N+1) + \frac{N(N-1)}{2} = \frac{2N(N+1)}{2} + \frac{N(N-1)}{2} = \frac{N}{2}(2(N+1) + (N-1)) = \frac{N}{2}(2N+2+N-1) = \frac{N}{2}(3N+1) = \frac{3N^2 + N}{2}.$$
4. Avec 54 cartes on peut construire N étages, N vérifiant l'inéquation :
$$\frac{3N^2 + N}{2} \leq 54 \iff 3N^2 + N \leq 108 \iff 3N^2 + N - 108 \leq 0.$$

Or le trinôme $3N^2 + N - 108$ a deux racines ($\Delta = 1 + 4 \times 3 \times 108 = 1297 > 0$) :
$$N_1 = \frac{-1 + \sqrt{1297}}{6} \approx 5,8 \text{ et } N_2 = \frac{-1 - \sqrt{1297}}{6} \approx -6,2.$$

Le trinôme est négatif sur l'intervalle $[-6,2 ; 5,8]$: le plus grand naturel appartenant à cet intervalle est 5 : on peut donc faire avec 54 cartes au maximum 5 étages.

Exercice 3 (4 points)

1. $A(0; 10)$, $B(5; 10)$, $C(5; 0)$, $D(0; 3)$, $E(5; 6)$, $F(4; 0)$.

2. On calcule l'aire du pentagone ABEFD :

- $\mathcal{A}(ABCO) = 5 \times 10 = 50$;

- $\mathcal{A}(ODF) = \frac{3 \times 4}{2} = 6$;

- $\mathcal{A}(CEF) = \frac{1 \times 6}{2} = 3$;

Donc $\mathcal{A}(ODF) + \mathcal{A}(CEF) = 6 + 3 = 9$.

Donc $\mathcal{A}(ABEFD) = 50 - 9 = 41$.

Finalement le pourcentage de scène éclairée est $\frac{\mathcal{A}(ABEFD)}{\mathcal{A}(ABCO)} \times 100 = \frac{41}{50} \times 100 = 82$ (%) : le visiteur a raison.

3. On a $\overrightarrow{FD} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FE} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, puis

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FE} = -4 \times 1 + 3 \times 6 = -4 + 18 = 14.$$

4. Par définition du produit scalaire :

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FE} = FD \times FE \times \cos \widehat{DFE} \quad (1). \text{ On a :}$$

- $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FE} = 14$;

- $FD^2 = (-4)^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$, donc $FD = 5$;

- $FE^2 = 1^2 + 6^2 = 136 = 37$, donc $FE = \sqrt{37}$;

L'égalité (1) s'écrit donc :

$$14 = 5 \times \sqrt{37} \times \cos \widehat{DFE}, \text{ d'où } \cos \widehat{DFE} = \frac{14}{5\sqrt{37}}.$$

5. On sait que le produit scalaire ne change pas si l'on remplace l'un des vecteurs par son projeté orthogonal sur l'autre vecteur, donc

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FM} \text{ avec M projeté orthogonal de E sur la droite (FD).}$$

Il suffit donc de faire passer l'un des côtés perpendiculaires de l'équerre par le point E, l'autre côté perpendiculaire coïncidant avec la droite (DF) (voir la figure).

