∽ ÉPREUVES COMMUNES DE CONTRÔLE CONTINU n° 2 ∾
Corrigé du sujet 26 – mai 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - CLASSE : Première Générale

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Question 1

Pour tout réel x, $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{x+1}} = \mathrm{e}^{2x+x+1} = \mathrm{e}^{3x+1}$.

Question 2

Les points $M(x\ ;\ y)$ communs aux deux courbes ont des abscisses qui vérifient :
$15x^2+10x-1 = 19x^2-22x+10 \iff 0 = 4x^2-32x+11$.
Or pour cette équation du second degré : $\Delta = 32^2-4\times4\times11 = 1\,024-176 = 848 > 0$: le discriminant est supérieur à zéro, donc cette équation a deux solutions distinctes ; les deux courbes ont deux points communs.

Question 3

$M(x\ ;\ y) \in C(\mathrm{A}, R=5) \iff \mathrm{A}M^2 = 5^2 \iff (x-3)^2+(y-(-1))^2 = 25 \iff (x-3)^2+(y+1)^2 = 25.$

Question 4

Un vecteur directeur de (d) est par exemple $\overrightarrow{d}\binom{-2}{3}$, donc un vecteur normal est par exemple $\overrightarrow{n}\binom{3}{2}$.

Question 5

On sait que $1+2+3+4+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Il faut donc trouver le plus petit naturel tel que $\dfrac{n(n+1)}{2} > 5000 \iff n(n+1) > 10000 \iff n^2+n-10000 > 0$.
Pour le trinôme $n^2+n-10000$, on a $\Delta = 1+40000 = 40001 > 0$.
Le trinôme a donc deux racines :

$$n_1 = \frac{-1+\sqrt{40001}}{2} \approx 99{,}5 \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{-1-\sqrt{40001}}{2} \approx -100,5.$$

On sait que le trinôme est négatif sur l'intervalle $[n_2\ ;\ n_1]$ donc le plus entier pour lequel le trinôme est positif est 100.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

$$f(x) = 8x^3-6x^2-2.$$

1. **a.**
$$f(x) = (x-1)\left(8x^2+2x+2\right).$$
Développons $(x-1)\left(8x^2+2x+2\right) = x^3+2x^2+2x-8x^2-2x-2 = x^3-6x^2-2 = f(x)$.
la factorisation est juste.

   b. Un point de l'axe des abscisses a une ordonnée nulle, donc un point commun à cet axe et à $\mathcal{C}$,vérifie :
$8x^3-6x^2-2 = 0 \iff (x-1)\left(8x^2+2x+2\right) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-1 &=& 0\\ 8x^2+2x+2 &=& 0\end{array}\right.$
La première équation a pour solution $x = 1$, la seconde est une équation du second degré pour laquelle :
$\Delta = 36-4\times8\times2 = 36-64 = -28 >$: cette équation n'a pas de solution réelle.
Donc $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses au seul point $(1\,;0)$.

2. **a.** f fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = 24x^2-12x = 12x(2x-1)$.

b. Le trinôme $x(2x-1)$ a deux racines : 0 et $\dfrac{1}{2}$.

Le coefficient $a = 24 > 0$, donc le trinôme est positif, sauf sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$. D'où

- Sur $]-\infty\,;\,0[\cup\left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, la dérivée est positive donc la fonction est croissante ;
- Sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$, la dérivée est négative donc la fonction est décroissante ;
- $f(0) = -2$ est un maximum de f et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 8\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 - 6\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 2 = 1 - \dfrac{3}{2} - 2 = -\dfrac{5}{2}$ est un minimum de la fonction f.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\frac{5}{2}$	$\nearrow$	

3. Une équation de T est :

$M(x\,;\,y) \in T \iff y - f\left(\dfrac{1}{2}\right) = f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$;

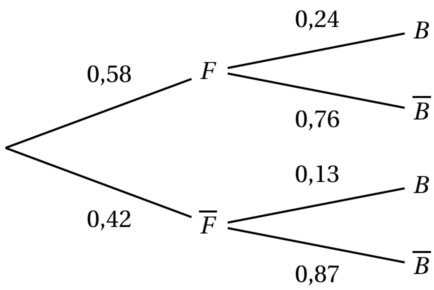
Avec $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{5}{2}$ et $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 12\times\dfrac{1}{2}\left(2\times\dfrac{1}{2} - 1\right) = 6\times 0 = 0$, l'équation devient :

$M(x\,;\,y) \in T \iff y + \dfrac{5}{2} = 0\left(x - \dfrac{1}{2}\right) \iff y = -\dfrac{5}{2}$

Comme $\text{B}\left(0\,;\,-\dfrac{5}{2}\right) \in T \iff -\dfrac{5}{2} = -\dfrac{5}{2}$ est vraie, on peut dire que le point B appartient à T.

EXERCICE 3 **5 POINTS**

1.



2. On a $p(F\cap B) = p(F)\times p_F(B) = 0,58\times 0,24 = 0,139\,2$.

3. D'après la loi des probabilités totales :

$p(B) = p(B\cap F) + p\left(B\cap\overline{F}\right)$.

Or $p\left(B\cap\overline{F}\right) = p\left(\overline{F}\cap B\right) = p\left(\overline{F}\right)\times p_{\overline{F}}(B) = 0,42\times 0,13 = 0,054\,6$.

Donc $p(B) = 0,139\,2 + 0,054\,6 = 0,193\,8$.

4. **a.** $X = 65$ correspond à l'évènement $F\cap B$ de probabilité 0,139 2 ;

$X = 40$ correspond à l'évènement $F\cap\overline{B}$ de probabilité $0,58 - 0,139\,2 = 0,440\,8$;

$X = 85$ correspond à l'évènement $\overline{F}\cap B$ de probabilité 0,054 6 ;

$X = 60$ correspond à l'évènement $\overline{F}\cap\overline{B}$ de probabilité $0,42 - 0,054\,6 = 0,365\,4$. D'où le tableau :

$X = x_i$	40	60	65	85
$p(X = x_i)$	0,440 8	0,365 4	0,139 2	0,054 6

b. On a $E(X) = 40\times 0,440\,8 + 60\times 0,365\,4 + 65\times 0,139\,2 + 85\times 0,054\,6 = 53,245 \approx 53,25$ (€).

Sur un grand nombre de clients, la dépense moyenne par client sera de 53,25 (€).

EXERCICE 4 **5 POINTS**

1. Diminuer de 1,5 %, c'est multiplier par $1 - \dfrac{1,5}{100} = 1 - 0,015 = 0,985$.
   Donc $d_1 = 400 \times 0,985 = 394$ (kg).
   Après une basse de 1,5 % la moyenne de déchets sera en 2019 de 394 (kg).
2. **a.** D'une année sur l'autre on multiplie la quantité de déchets d'une année par 0,985.
   On a donc pour tout naturel n, $d_{n+1} = 0,985 d_n$, égalité qui montre que la suite (d_n) est une suite géométrique de raison 0,985 et de premier terme $d_0 = 400$.

   b. On sait que pour tout naturel n, $d_n = d_0 \times 0,985^n = 400 \times 0,985^n$.
3. **a.** On obtient une masse inférieure à 365 kg pour $n = 7$, soit en 2025.

   b.

```
def dechet(m) :
d = 0
n=0
while d > m :
    d = d*0,985
    n=n+1
return (2018+n)
```