∽ BTS Métropole 18 mai 2026 ∾

Services informatiques aux organisations

Épreuve de mathématiques pour l'informatique

– Corrigé –

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.
Durée : 2 heures
Coefficient : 3

Exercice 1 — 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule affirmation est exacte. Recopier sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte.
Une réponse exacte vaut 1 point. Une réponse fausse ou une absence de réponse n'est pas pénalisée.
Aucune justification n'est demandée.

1. On considère le nombre écrit en base deux $(10110{,}11101)_2$. Son écriture en base dix est :

A. 22,71875.	B. 45,8125.	C. 22,90625.

$$\begin{aligned}(10110{,}11101)_2 &= 1\times2^4+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^{-1}+1\times2^{-2}+1\times2^{-3}+1\times2^{-5}\\ &= 16+4+2+0{,}5+0{,}25+0{,}125+0{,}03125=22{,}90625.\end{aligned}$$

Réponse C.

2. On considère les nombres, écrits en base seize, $(3D8)_{16}$ et $(2C5)_{16}$. La somme écrite en base seize de ces nombres est égale à :

A. $(763)_{16}$.	B. $(69D)_{16}$.	C. $(148F)_{16}$.

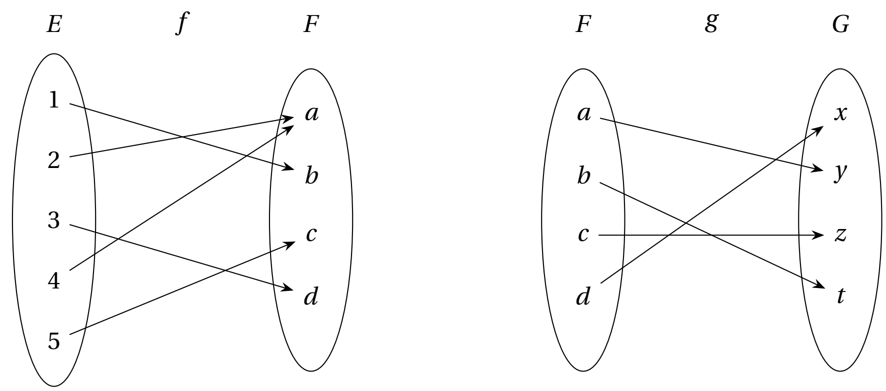
Addition colonne par colonne en base seize :

- Unités : $8+5=13=D$, retenue 0.
- Seizaines : $D+C=13+12=25=16+9$, chiffre 9, retenue 1.
- 256 aines : $3+2+1=6$, chiffre 6.

Donc $(3D8)_{16}+(2C5)_{16}=(69D)_{16}$.

Réponse B.

Pour les deux questions qui suivent, on considère trois ensembles E, F et G. On définit une application f de E vers F et une application g de F vers G par les diagrammes suivants.



3. Parmi les trois propositions suivantes, laquelle est exacte ?

A. $f^{-1}(\{a\,;\,b\}) = \{1\,;\,2\}$	B. $f(\{1\,;\,2\} \cap \{2\,;\,3\})$ $= \{a\,;\,b\,;\,d\}$	C. $\overline{f^{-1}(\{c\,;\,d\})} = f^{-1}(\{a\,;\,b\})$

D'après le diagramme : $f(1) = b$, $f(2) = a$, $f(3) = d$, $f(4) = a$, $f(5) = c$. Donc :

- $f^{-1}(\{a\,;\,b\}) = \{1\,;\,2\,;\,4\}$, qui n'est pas égal à $\{1\,;\,2\}$: A est fausse.
- $\{1\,;\,2\} \cap \{2\,;\,3\} = \{2\}$ donc $f(\{2\}) = \{a\}$ qui n'est pas égal à $\{a\,;\,b\,;\,d\}$: B est fausse.
- $f^{-1}(\{c\,;\,d\}) = \{3\,;\,5\}$, dont le complémentaire dans E est $\{1\,;\,2\,;\,4\}$, qui est bien égal à $f^{-1}(\{a\,;\,b\})$: **C est exacte**.

Réponse C.

4. L'image de 4 par l'application composée de f par g, notée $g \circ f$, est :

A. x	B. y	C. z

$f(4) = a$ d'après le diagramme de f, puis $g(a) = y$ d'après le diagramme de g.
Donc $g \circ f(4) = g\left(f(4)\right) = g(a) = y$.
Réponse B.

Exercice 2 **5 points**

Un système de codage affine est un système de chiffrement basé sur la correspondance entre les lettres de l'alphabet et les entiers compris entre 0 et 25.
La table de correspondance est donnée ci-dessous.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Le codage consiste tout d'abord à choisir une clé qui est un couple d'entiers $(a\,;\,b)$ avec $1 \leqslant a \leqslant 25$ et $0 \leqslant b \leqslant 25$.
Pour coder une lettre :

- on détermine l'entier x qui lui correspond dans la table de correspondance ;
- on calcule $ax+b$ puis on détermine l'entier y compris entre 0 et 25 tel que $ax+b \equiv y\ [26]$;
- on détermine la lettre associée à y dans la table de correspondance.

Exemple : Codons la lettre H avec la clé $(9\,;\,5)$.

- H correspond à $x=7$;
- $9\times 7+5=68$ et $68 \equiv 16\ [26]$ donc $y=16$;
- $y=16$ correspond à la lettre Q donc H est codée en Q.

1. Coder le mot SI avec la clé $(9\,;\,5)$ en détaillant les différentes étapes.

> **Lettre S :** $x=18$. $9\times 18+5=167$. Or $167=6\times 26+11$, donc $167 \equiv 11\ [26]$. L'entier 11 correspond à la lettre **L**.
> **Lettre I :** $x=8$. $9\times 8+5=77$. Or $77=2\times 26+25$, donc $77\equiv 25\ [26]$. L'entier 25 correspond à la lettre **Z**.
> Le mot SI est codé en **LZ** avec la clé $(9\,;\,5)$.

2. Toutes les clés de codage $(a\,;\,b)$ ne permettent pas de crypter un message convenablement. On admet qu'une clé de codage est acceptable si et seulement si l'entier a est premier avec 26. Il n'y a pas de condition sur b (donc 26 choix possibles pour b).

Recopier et compléter les lignes numérotées **3, 4 et 5** de l'algorithme définissant la fonction `nbCles()` qui renvoie le nombre de clés $(a\,;\,b)$ acceptables et dans laquelle la fonction `pgcd(u, v)` renvoie le plus grand diviseur commun des entiers u et v.

```
1  Fonction nbCles()
2    nb ← 0
3    Pour a allant de 1 à ... faire
4      Si pgcd(a, 26) = ...  alors
5        nb ← ...
6      Fin de Si
7    Fin de Pour
8    Renvoyer nb ×26
```

On parcourt les entiers a de 1 à 25 et on incrémente nb chaque fois que a est premier avec 26, c'est-à-dire que pgcd$(a, 26) = 1$:

```
1   Fonction nbCles()
2     nb ← 0
3     Pour a allant de 1 à 25 faire
4       Si pgcd(a, 26) = 1 alors
5         nb ← nb + 1
        Fin de Si
      Fin de Pour
6     Renvoyer nb ×26
```

Remarque : les entiers premiers avec 26 entre 1 et 25 sont $1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25$, soit 12 valeurs. La fonction renvoie donc $12 \times 26 = 312$ clés acceptables.

Pour déterminer la clé de décodage associée à la clé de codage $(a\,;\, b)$, il est nécessaire de déterminer un entier c compris entre 0 et 25 tel que $ac \equiv 1\ [26]$.
La fonction `inverse` de paramètre a donnée ci-dessous renvoie le plus petit entier c compris entre 0 et 25 tel que $ac \equiv 1\ [26]$.
La fonction « `reste(u, n)` » qui est utilisée ci-dessous renvoie le reste de la division euclidienne d'un entier naturel u par un entier naturel non nul n.

```
1   Fonction inverse(a)
2     c ← 1
3     Tant que reste(a × c, 26) ... faire
4       c ← c + 1
5     Renvoyer ...
```

3. **a.** Recopier et compléter les lignes numérotées **3** et **5** de l'algorithme définissant la fonction `inverse` de paramètre a.

```
3     Tant que reste(a × c, 26) ≠ 1 faire
5     Renvoyer c
```

b. Déterminer l'entier renvoyé par `inverse`(9).

On déroule l'algorithme avec $a = 9$:

- $c = 1$: `reste`$(9 \times 1, 26) = 9 \neq 1$, on continue ;
- $c = 2$: `reste`$(18, 26) = 18 \neq 1$, on continue ;
- $c = 3$: `reste`$(27, 26) = 1$, on s'arrête.

Donc `inverse`(9) renvoie **3**.

4. Soient x et y deux entiers compris entre 0 et 25.

a. Montrer que si $9x+5 \equiv y$ [26] alors $x+15 \equiv 3y$ [26].

On suppose que $9x+5 \equiv y$ [26]. En multipliant les deux membres par 3 :

$$3 \times (9x+5) \equiv 3y \ [26] \iff 27x+15 \equiv 3y \ [26].$$

Or $27 = 26+1$, donc $27x \equiv x$ [26]. On en déduit :

$$x+15 \equiv 3y \ [26].$$

b. On admet que si y est l'entier associé à une lettre codée, alors l'entier x correspondant à la lettre décodée vérifie $x \equiv 3y+11$ [26]. Décoder le mot ZA.

Lettre Z : $y = 25$. $3 \times 25 + 11 = 86$. Or $86 = 3 \times 26 + 8$, donc $86 \equiv 8$ [26]. L'entier 8 correspond à la lettre **I**.
Lettre A : $y = 0$. $3 \times 0 + 11 = 11$. L'entier 11 correspond à la lettre **L**.
Le mot ZA est décodé en **IL**.

Exercice 3 — 11 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Le gérant d'un restaurant de type buffet à volonté propose la grille tarifaire (en euros) résumée dans le tableau ci-dessous.

	Enfant de 6 ans ou moins	Enfant entre 7 et 13 ans	Adulte
Midi	7	12	20
Soir	7	15	30

Le gérant s'intéresse à un groupe de clients potentiels constitué de 2 enfants de 6 ans ou moins, de 3 enfants entre 7 et 13 ans et de 4 adultes.

On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 20 \\ 7 & 15 & 30 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit matriciel $P \times N$ puis interpréter les coefficients de $P \times N$ dans le contexte de l'exercice.

$$P \times N = \begin{pmatrix} 7 \times 2 + 12 \times 3 + 20 \times 4 \\ 7 \times 2 + 15 \times 3 + 30 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14+36+80 \\ 14+45+120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 179 \end{pmatrix}.$$

Le coefficient 130 représente le montant total facturé en euros pour le groupe le midi, et

179 représente le montant total facturé en euros pour le même groupe le soir.

2. Le gérant estime que sa tarification du midi n'est pas assez rentable. Il souhaite augmenter le tarif du menu adulte le midi uniquement. On note t le tarif envisagé pour le menu adulte du midi. Ainsi, la matrice P devient $P' = \begin{pmatrix} 7 & 12 & t \\ 7 & 15 & 30 \end{pmatrix}$.

a. Calculer, en fonction de t, le coefficient de la première ligne du produit matriciel $P' \times N$.

Le coefficient de la première ligne de $P' \times N$ est :

$$7 \times 2 + 12 \times 3 + t \times 4 = 14 + 36 + 4t = 4t + 50.$$

b. Déterminer la valeur de t pour laquelle le montant facturé le midi au groupe constitué de 2 enfants de 6 ans ou moins, de 3 enfants entre 7 et 13 ans et de 4 adultes serait de 138 euros.

On résout $4t + 50 = 138$, soit $4t = 88$ donc $t = 22$.
Le tarif du menu adulte le midi doit être de **22 €**.

Partie B

L'analyse comptable du chiffre d'affaires du restaurant a mis en évidence que certains clients étaient particulièrement rentables lorsqu'ils effectuent des achats additionnels à leur menu, à savoir un apéritif, une boisson pendant le repas ou encore un café.
Un client est dit « très rentable » lorsqu'une au moins des conditions énumérées ci-dessous est remplie :

- le client prend un apéritif, une boisson avec son repas et un café ;
- le client prend un apéritif, une boisson avec son repas mais pas de café ;
- le client prend un apéritif, un café mais pas de boisson avec son repas.

On définit trois variables booléennes a, b et c de la façon suivante :

a lorsque le client prend un apéritif et $\overline{a}$ sinon ;

b lorsque le client prend une boisson avec son repas et $\overline{b}$ sinon ;

c lorsque le client prend un café et $\overline{c}$ sinon.

On note E l'expression booléenne traduisant le fait qu'un client soit « très rentable ».

1. Traduire chaque condition permettant à un client d'être qualifié de « très rentable » à l'aide des variables a, b et c et en déduire une expression de E.

Les trois conditions se traduisent respectivement par abc, $ab\overline{c}$ et $a\overline{b}c$. Donc :

$$E = abc + ab\overline{c} + a\overline{b}c.$$

2. Représenter l'expression E dans un tableau de Karnaugh et en déduire une expression simplifiée de E sous la forme d'une somme de deux termes.

a \ bc	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	0	1	1	1

On regroupe :

- les deux cases $a = 1$ avec $c = 1$: ac (couvre $(1, 0, 1)$ et $(1, 1, 1)$) ;
- les deux cases $a = 1$ avec $b = 1$: ab (couvre $(1, 1, 0)$ et $(1, 1, 1)$).

Donc $E = ab + ac$.

3. Traduire par une phrase l'expression simplifiée de E.

Un client est « très rentable » si et seulement s'il prend un apéritif et au moins une boisson avec son repas ou un café.

4. Déterminer l'expression de $\overline{E}$ sous la forme d'une somme de deux termes.

On reprend le tableau de Karnaugh et on regroupe les cases à 0 :

- toute la ligne $a = 0$: $\overline{a}$ (couvre $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ et $(0, 1, 0)$) ;
- les deux cases $b = 0$ avec $c = 0$: $\overline{b}\,\overline{c}$ (couvre $(0, 0, 0)$ et $(1, 0, 0)$).

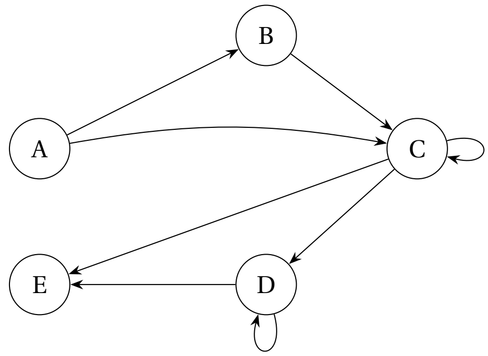
Donc $\overline{E} = \overline{a} + \overline{b}\,\overline{c}$.

Partie C

Le gérant du restaurant souhaite analyser le parcours des clients au sein de l'établissement. On donne la description des différentes zones ci-dessous.

- Zone A : Accueil
- Zone B : Buffet des entrées
- Zone C : Buffet des plats chauds
- Zone D : Buffet des desserts
- Zone E : Caisse et sortie

Le gérant a observé le cheminement de différents clients lors d'un service. L'ensemble des cheminements observés peut être modélisé par un graphe dont les sommets représentent les zones du restaurant et les arcs le passage d'un client d'une zone à une autre. Le fait qu'un client se soit resservi est modélisé par une boucle.
On donne ci-dessous une représentation de ce graphe.



1. **a.** Déterminer un chemin hamiltonien allant de A vers E.

Un chemin hamiltonien parcourt chaque sommet du graphe exactement une fois. En partant de A et en arrivant en E :

$$A \to B \to C \to D \to E.$$

b. Que signifie pour un client de parcourir ce chemin hamiltonien dans le contexte de l'exercice?

Cela signifie que le client visite chacune des cinq zones du restaurant exactement une fois, dans l'ordre : Accueil, Buffet des entrées, Buffet des plats chauds, Buffet des desserts, Caisse et sortie.

2. Reproduire et compléter le tableau suivant.

Sommet	A	B	C	D	E
Successeur(s)					

Sommet	A	B	C	D	E
Successeur(s)	B, C	C	C, D, E	D, E	—

3. Déterminer la matrice d'adjacence M du graphe, les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. **a.** Déterminer la matrice M^3.

On calcule successivement $M^2 = M \times M$ puis $M^3 = M^2 \times M$:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. En déduire, en justifiant la réponse, le nombre de chemins de longueur 3 allant de C vers E.

Le coefficient situé à la troisième ligne (sommet C) et cinquième colonne (sommet E) de la matrice M^3 donne le nombre de chemins de longueur 3 allant de C vers E.

Ce coefficient vaut 3, donc il y a 3 **chemins de longueur** 3 allant de C vers E, à savoir :

- C → C → C → E (deux boucles sur C puis l'arc C → E) ;
- C → C → D → E (une boucle sur C, puis C → D, puis D → E) ;
- C → D → D → E (C → D, puis boucle sur D, puis D → E).

5. On admet que la matrice d'adjacence de la fermeture transitive du graphe est :

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Combien d'arcs faudrait-il ajouter au graphe initial pour construire sa fermeture transitive ?

On compare les coefficients de $\widehat{M}$ et de M : les arcs supplémentaires apparaissent là où $\widehat{M}$ vaut 1 et M vaut 0.

- Ligne A : $M = (0, 1, 1, 0, 0)$ et $\widehat{M} = (0, 1, 1, 1, 1)$: 2 arcs supplémentaires (A → D et A → E).
- Ligne B : $M = (0, 0, 1, 0, 0)$ et $\widehat{M} = (0, 0, 1, 1, 1)$: 2 arcs supplémentaires (B → D et B → E).
- Ligne C : $M = (0, 0, 1, 1, 1)$ et $\widehat{M} = (0, 0, 1, 1, 1)$: 0 arc supplémentaire.

- Ligne D : $M = (0, 0, 0, 1, 1)$ et $\widehat{M} = (0, 0, 0, 1, 1)$: 0 arc supplémentaire.
- Ligne E : $M = (0, 0, 0, 0, 0)$ et $\widehat{M} = (0, 0, 0, 0, 0)$: 0 arc supplémentaire.

Au total, il faudrait ajouter **4** arcs au graphe initial pour construire sa fermeture transitive.