Corrigé S. T. A. E.–S. T. P. A. Antilles–Guyane session juin 2007

Exercice 1 **7 points**

La courbe $(\mathscr{C}_f)$ donnée dans le document est la représentation graphique, dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie et dérivable sur $[-\pi ; \pi]$.

Partie A

Par lecture graphique,

1. La fonction f semble impaire sur $[-\pi ; \pi]$. La courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.
2. Résolvons sur $[-\pi ; \pi]$ l'équation : $f(x) = 0$. Avec la précision permise par le graphique, la courbe coupe l'axe des abscisses en trois points d'abscisses $-1{,}9$, 0, $1{,}9$. L'ensemble des solutions de l'équation est alors $\{-1{,}9;\ 0;\ 1{,}9\}$
3. Résolvons sur $[-\pi ; \pi]$ l'inéquation : $f(x) > 0$. Lorsque la courbe représentative est située dans le demi-plan des $y > 0$, $f(x)$ est strictement positif. L'ensemble des solutions de l'inéquation est $[-\pi ; -1{,}9[\cup]0 ; 1{,}9[$.

Partie B

Étude théorique

On admet que f est définie sur $[-\pi ; \pi]$ par : $f(x) = 2\sin(x) - x$.

1. $f'(x) = 2\cos(x) - 1$.
2. Résolvons sur $[0 ; \pi]$ l'équation : $f'(x) = 0$.
   $2\cos(x) - 1 = 0 \iff \cos(x) = \frac{1}{2}$, or $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Par conséquent $x = \frac{\pi}{3}$.
   Sur $[0 ; \pi]$ l'ensemble solution de l'équation $f'(x) = 0$ est $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$
3. **a.** En utilisant le cercle trigonométrique, résolvons sur $[0 ; \pi]$ l'inéquation : $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$.
   Sur l'axe des abscisses, considérons l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$. Les valeurs de x pour lesquelles $\cos(x) \geqslant \frac{1}{2}$ sont, sur le cercle trigonométrique, comprises entre 0 et $\frac{\pi}{3}$. L'ensemble des solutions est $\left[0 ; \frac{\pi}{3}\right]$

   b. Il en résulte que si $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{3}\right[$, $f'(x) > 0$

   c. Dressons le tableau de variation de la fonction f sur $[0 ; \pi]$.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
   Sur $\left[0 ; \frac{\pi}{3}\right[$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
   Sur $\left]\frac{\pi}{3} , \pi\right]$, $f'x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
   $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - \left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 0{,}68$
   $f(\pi) = 2\sin(\pi) - \pi = 0 - \pi = -\pi$
   Construisons le tableau de variation de f sur $[0;\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'		$+$	0	$-$	
Variation de f	0	↗	$\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$	↘	$-\pi$

4. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $\left[\frac{\pi}{3} ; \pi\right]$ une unique solution α.
   Sur $\left[\frac{\pi}{3} ; \pi\right]$ f est une fonction dérivable strictement décroissante. $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \times f(\pi) < 0$, par conséquent il existe un unique nombre réel $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3} ; \pi\right]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   À l'aide de la calculatrice, donnons un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} : $\alpha \approx 1{,}90$

Exercice 2 **6 points**

Dans tout l'exercice, les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Un oiseleur élève douze perroquets, sept jaunes et cinq verts. Quatre perroquets dont un vert sont parleurs.
L'oiseleur prend au filet, simultanément et au hasard, trois perroquets parmi les douze pour les exposer.

1. Montrons qu'il y a 220 prises possibles.
   L'oiseleur choisit trois perroquets parmi les douze qu'il possède. C'est donc le nombre de combinaisons que nous pouvons faire de 3 éléments parmi 12 c'est-à-dire C_{12}^{3}
   $C_{12}^{3} = \dfrac{12 \times 11 \times 10}{1 \times 2 \times 3} = 220.$
2. Déterminons la probabilité des évènements suivants :
   L' univers, Ω, est l'ensemble des choix possibles de 3 éléments parmi 12 et la loi mise sur cet univers est l'équiprobabilité. La probabilité d'un évènement A est $p(A) = \dfrac{\text{Card}\, A}{\text{Card}\, \Omega}$
   A : « les trois perroquets sont de la même couleur ».
   L'évènement est réalisé s'il est choisi trois perroquets parmi les sept jaunes ou les trois parmi les cinq verts. $\text{Card}\, A = \mathrm{C}_7^3 + \mathrm{C}_5^3 = \dfrac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} + \dfrac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 35 + 10 = 45.$
   Par conséquent $p(A) = \dfrac{45}{220} = \dfrac{9}{44}$.
   B : « un perroquet exactement est parleur ».
   L'évènement est réalisé s'il est choisi un perroquet parmi les quatre qui sont parleurs et deux parmi les huit qui ne sont pas parleurs. $\text{Card}\, B = \mathrm{C}_4^1 \times \mathrm{C}_8^2 = 4 \times \dfrac{8 \times 7}{1 \times 2} = 4 \times 28 = 112.$
   Par conséquent $p(B) = \dfrac{112}{220} = \dfrac{28}{55}$.
   C : « au moins un perroquet est parleur ».
   Considérons l'évènement contraire c'est-à-dire l'évènement : « aucun perroquet n'est parleur ». Le choix est alors de trois perroquets parmi les huit qui ne sont pas parleurs.
   Ce choix est au nombre de C_8^3 soit $\dfrac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 56.$
   D'où $p(C) = 1 - \dfrac{56}{220} = \dfrac{41}{55}$.
3. Montrons que la probabilité de l'évènement A $\cap$ B est $\dfrac{6}{55}$.
   L'évènement est réalisé s'il est choisi le perroquet vert parleur et deux autres perroquets parmi les quatre qui ne sont pas parleurs ou s'il est choisi un perroquet jaune parmi les trois qui sont parleurs et deux parmi les quatre qui ne sont pas parleurs. Card $(A \cap B) = \mathrm{C}_4^2 + \mathrm{C}_1^3 \times \mathrm{C}_4^2 = 24$. Par conséquent $p(A \cap B) = \dfrac{24}{220} = \dfrac{6}{55}$.
4. Sachant que les trois perroquets attrapés sont de la même couleur, la probabilité qu'exactement l'un d'entre eux soit parleur est notée $p_A(A \cap B)$.
   $p_A(A \cap B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{\frac{6}{55}}{\frac{9}{44}} = \dfrac{6}{55} \times \dfrac{44}{9} = \dfrac{8}{15}.$

Exercice 3 **7 points**

On considère la fonction g définie sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par :

$$g(x) = 2x(\ln x - 1).$$

1. Déterminons la limite de g en $+\infty$.
   $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x \times \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - 1) = +\infty \times +\infty = +\infty$
2. **a.** Déterminons la fonction dérivée de g.
   $g'(x) = 2\left(\ln(x) - 1\right) + 2x \times \left(\dfrac{1}{x}\right) = 2\ln(x) - 2 + 2 = 2\ln(x).$
   Nous avons bien obtenu $g'(x) = 2\ln x$.

   b. Résolvons sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ l'équation : $g'(x) = 0$.
   $2\ln(x) = 0 \quad \ln x = 0 \quad x = 1$. L'ensemble des solutions de l'équation est $\{1\}$.

c. Déterminons le signe de $g'(x)$.

La fonction $x \mapsto \ln x$ est une fonction strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$,

par conséquent si $x \in \left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right[$, $g'(x) < 0$ et si $x \in]1\ ;\ +\infty[$, $g'(x) > 0$.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Sur $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right[$, $g'(x) < 0$ par conséquent g est strictement décroissante sur cet intervalle.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

Sur $]1\ ;\ +\infty[$, $g'(x) > 0$ par conséquent g est strictement croissante sur cet intervalle.

$g(1) = 2 \times (\ln 1 - 1) = -2$. $\qquad g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) - 1\right) = -\ln 2 - 1$.

Construisons maintenant le tableau de variation de g sur $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

x	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
Variation de g	$-\ln 2 - 1$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

3. Complétons le tableau suivant :

x	0,5	1	2	3	4	5
$g(x)$	$-1{,}7$	-2	$-1{,}2$	0,6	3,1	6,1

Les valeurs sont arrondies à 10^{-1} près.

4. La courbe $(\mathscr{C}_g)$ représentative de la fonction g dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées est construite à la fin.

5. a. La fonction G définie sur $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par $G(x) = x^2\left(\ln x - \dfrac{3}{2}\right)$ est une primitive de g sur $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ lorsque $G' = g$.

$G'(x) = 2x\left(\ln(x) - \frac{3}{2}\right) + x^2 \times \left(\frac{1}{x}\right) = 2x\ln(x) - 3x + x = 2x\ln x - 2x = 2x(\ln(x) - 1) = g(x)$.

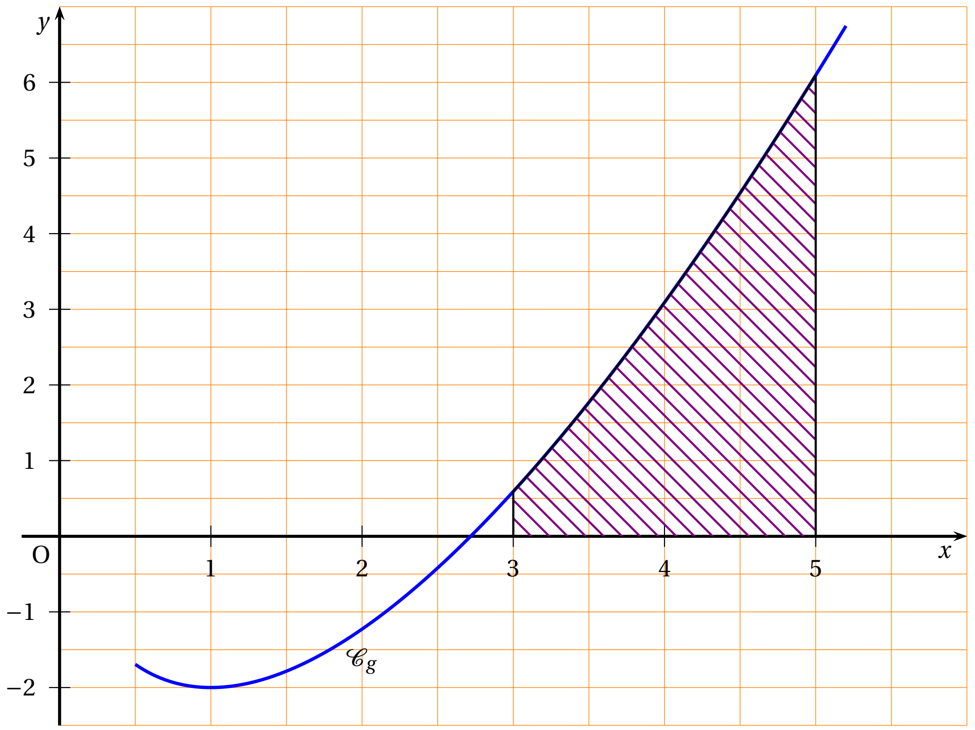
Il en résulte que G est une primitive de g sur $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$

b. Sur $[3\ ;\ 5]$ g est positive par conséquent l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C}_g)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 3$ et $x = 5$ est $\displaystyle\int_3^5 g(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_3^5 g(x)\,\mathrm{d}x = \Big[G(x)\Big]_3^5 = G(5) - G(3) = 25\ln(5) - \frac{75}{2} - \left(9\ln(3) - \frac{9}{2}\right) = 25\ln(5) - 9\ln(3) - 24.$$

L aire du domaine plan délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 5$ est $25\ln(5) - 9\ln(3) - 24$ unités d'aire.

Une valeur approchée de cette aire est 6,35 cm^2, au mm^2 près.


y
6
5
4
3
2
1
O
1
2
3
4
5
x
−1
−2
$\mathscr{C}_g$

DOCUMENT DE L'EXERCICE 1