Baccalauréat STI2D Épreuve d'enseignement de spécialité

Nouvelle-Calédonie 9 septembre 2023

Physique-Chimie et Mathématiques

Exercice 1 **2 points**

Montée en température du moteur

La température du moteur (exprimée en °C) est modélisée par une fonction θ dépendant du temps (exprimé en secondes) écoulé depuis le démarrage du moteur.
On admet que la fonction θ, définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, est une solution sur cet intervalle de l'équation différentielle suivante :

$$y' = -\frac{1}{180}y + \frac{4}{9}.$$

7. Déterminons les solutions sur $[0\ ;\ +\infty[$ de cette équation différentielle.
Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par
$y(x) = Ce^{-ax} + \dfrac{b}{a}$ où C est une constante quelconque.
$a = \dfrac{1}{180}$ $b = \dfrac{4}{9}$ par conséquent sur $[0\ ;\ +\infty[$ $y(t) = Ce^{-\frac{1}{180}t} + \dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{180}}$
c'est-à-dire $\theta(t) = Ce^{-\frac{1}{180}t} + 80$ où C est une constante quelconque.
À $t = 0$, la température du moteur est de 20° C.

8. Déterminons C pour que la condition initiale soit vérifiée.
$\theta(0) = 20$ ou $Ce^0 + 80 = 20$ d'où $C = 20 - 80 = -60$.
La fonction θ est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\theta(t) = 80 - 60e^{-\frac{1}{180}t}.$$

9. Résolvons sur $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $\theta(t) = 79$.

$$\begin{aligned} 80 - 60e^{-\frac{1}{180}t} &= 79 \\ -60e^{-\frac{1}{180}t} &= -1 \\ e^{-\frac{1}{180}t} &= \frac{1}{60} \\ -\frac{1}{180}t &= -\ln 60 \\ t &= \ln 60 \times 180 \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation est $\{180\ln 60\}$

Le changement de carburant ne doit pas modifier la montée en température du moteur. La température optimale de fonctionnement du moteur est de 79 ° C.
Cette température doit être atteinte en moins de vingt minutes.

10. Cette condition est respectée, car $180 \times \ln 60 \approx 737$, or à 20 minutes correspondent 1 200 s.
Nous avons bien $737 < 1\,200$

Exercice 3 **4 points**

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

Question 1

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Soient z_1 et z_2 les nombres complexes définis par :

$$z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}.$$

1. Écrivons z_1 sous forme exponentielle, en détaillant les calculs.
Une forme exponentielle d'un nombre complexe z non nul est $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
$|z| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{2+2} = 2$
$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Il en résulte $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.
Une écriture sous forme exponentielle de z est , par conséquent $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

2. Montrons que $2z_2^3 = z_1$.
En utilisant la formule de Moivre $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \left(\mathrm{e}^{ni\theta}\right)$, nous avons

$$2z_2^3 = 2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right)^3 = 2\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right) = 2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right) = z_1$$

Q.E.D.

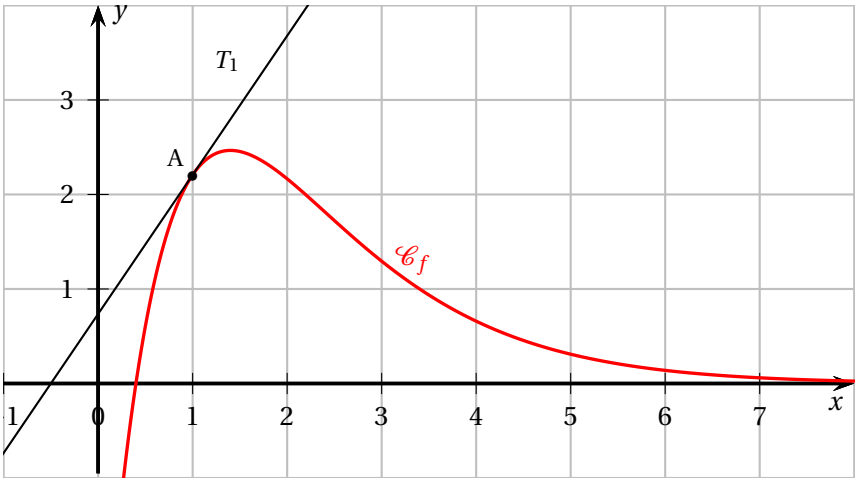
Question 2

Soit la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = (10x-4)\mathrm{e}^{-x}.$$

On nomme $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f donnée dans le repère ci-dessous.
La droite T_1 est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1 et on admet que la dérivée de f est définie pour tout réel x par

$$f'(x) = (-10x+14)\mathrm{e}^{-x}.$$



1. Calculons la valeur exacte de l'ordonnée du point A.
Pour ce faire, calculons $f(1)$
$f(1) = (10\times 1-4)\mathrm{e}^{-1} = 6\mathrm{e}^{-1} \approx 2,21$.

2. Calculons $f'(1)$.

$f'(1) = (-10 \times 1 + 14)\mathrm{e}^{-1} = 4\mathrm{e}^{-1} \approx 1,47$.

Cette valeur est le coefficient directeur de T_1, tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

3. La courbe représentative de la fonction f suggère l'existence d'un maximum sur l'intervalle $[1\,;2]$.

Déterminons la valeur exacte de ce maximum.

Les maximums sont à rechercher parmi les points où la dérivée s'annule.

Résolvons donc $f'(x) = 0$ soit $(-10x + 14)\mathrm{e}^{-x} = 0$.

Pour tout x, $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$, nous sommes amenés à résoudre

$-10x + 14 = 0 \iff 14 = 10x \iff 7 = 5x$ d'où $x = \dfrac{7}{5} = 1,4$.

La fonction admet un maximum pour $x = \dfrac{7}{5}$.