Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI novembre 2009 Nouvelle-Calédonie Génie mécanique - Génie énergétique - Génie civil

EXERCICE 1 **5 points**

1. $P(z) = 0 \iff z^3 + 2z^2 - 16 = 0$

a. $P(2) = 2^3 + 2 \times 2^2 - 16 = 8 + 8 - 16 = 0$. $P(z) = (z-2)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right) \iff (z-2)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right) = z^3 + 2z^2 - 16 \iff z^3 + \alpha z^2 + \beta z - z^2 - 2\alpha z - 2\beta = z^3 + 2z^2 - 16 \iff \begin{cases} \alpha - 2 &= 2 \\ \beta - 2\alpha &= 0 \\ -2\beta &= -16 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} \alpha &= 4 \\ 8 - 2 \times 4 &= 0 \\ \beta &= 8 \end{cases}$.

Donc $P(z) = (z-2)\left(z^2 + 4z + 8\right)$.

b. $P(z) = 0 \iff (z-2)\left(z^2 + 4z + 8\right) \iff \begin{cases} z - 2 &= 0 \\ \text{ou} & \\ z^2 + 4z + 8 &= 0 \end{cases}$

Résolution de l'équation $z^2 + 4z + 8 = 0$: $\Delta = 4^2 - 4 \times 8 = 16 - 32 = -16 = (4\text{i})^2$.

L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

$z_2 = \dfrac{-4 + 4\text{i}}{2} = -2 + 2\text{i}$ et $z_3 = -2 - 2\text{i}$.

On a donc finalement :

$$P(z) = 0 \iff z_1 = 2 \quad \text{ou} \quad z_2 = -2 + 2\text{i} \quad \text{ou} \quad z_3 = -2 - 2\text{i}.$$

2. Étude du triangle ABC

a. Voir la figure plus bas.

b. $|b - a|^2 = |-2 - 2\text{i} - 2| = |-4 - 2\text{i}| = 16 + 4 = 20 \Rightarrow |b - a| = 2\sqrt{5}$;

$|c - a|^2 = |4\text{i} - 2|^2 = 16 + 4 = 20 \Rightarrow |c - a| = 2\sqrt{5}$;

$|c - b|^2 = |4\text{i} + 2 + 2\text{i}|^2 = |2 + 6\text{i}|^2 = 4 + 36 = 40 \Rightarrow |c - b| = 2\sqrt{10}$.

c. On a donc $|b - a| = |c - a| = \text{AB} = \text{AC} = 2\sqrt{5}$ ce qui signifie que ABC est isocèle en A et d'autre part

$20 + 20 = 40 \iff \text{AB}^2 + \text{AC}^2 = \text{BC}^2$ ce qui signifie d'après la réciproque du théorème de Pythagore que ABC est rectangle en A.

d. ABDC est un carré entraîne que $\overrightarrow{\text{AB}} = \overrightarrow{\text{CD}} \iff z_\text{B} - z_\text{A} = z_\text{D} - z_\text{C} \iff z_\text{D} = z_\text{B} - z_\text{A} + z_\text{C} = -2 - 2\text{i} - 2 + 4\text{i} = -4 + 2\text{i} = d$.

3. **a.** $\omega = \sqrt{2}\text{e}^{\frac{3\text{i}\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \text{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + \text{i}$.

b. ABCD est un carré puisque c'est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur, donc un losange et un angle droit, donc un rectangle.

Il est donc inscrit dans un cercle dont le centre est par exemple le milieu de [AD] qui a pour affixe $\dfrac{2 - 4 + 4\text{i}}{2} = -1 + 2\text{i}$: c'est donc Ω.

Le rayon du cercle est égal à $\dfrac{\text{BC}}{2} = \dfrac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$.

Exercice 2 **4 points**

1. On a $x_0+x_1+x_2+x_3+x_4=100 \iff x_0+x_0+r+x_0+2r+x_0+3r+x_0+4r=5x_0+10r=100 \iff 50+10r=100 \iff 10r=50 \iff r=5$.

2. **a.** $X \in \{0\ ;\ -1\ ;\ 2\ ;\ -3\ ;\ 4\}$.

   b. $p(X=2)=\dfrac{20}{100}=0,2$.

   c.

x_i	0	-1	2	-3	4
$p(X=x_i)$	$\dfrac{10}{100}$	$\dfrac{15}{100}$	$\dfrac{20}{100}$	$\dfrac{25}{100}$	$\dfrac{30}{100}$

   $\text{E}(X)=0\times\dfrac{10}{100}-1\times\dfrac{15}{100}+2\times\dfrac{20}{100}-3\times\dfrac{25}{100}+4\times\dfrac{30}{100}=\dfrac{-15+40-75+120}{100}=\dfrac{70}{100}=0,70$ (€).

   d. Le tableau de la nouvelle loi est le suivant :

y_i	-0	1	-2	3	-4
$p(Y=y_i)$	$\dfrac{10}{100}$	$\dfrac{15}{100}$	$\dfrac{20}{100}$	$\dfrac{25}{100}$	$\dfrac{30}{100}$

   La nouvelle espérance mathématique est donc égale à :

   $\text{E}(Y)=0\times\dfrac{10}{100}+1\times\dfrac{15}{100}-2\times\dfrac{20}{100}+3\times\dfrac{25}{100}-4\times\dfrac{30}{100}=\dfrac{15-40+75-120}{100}=\dfrac{-70}{100}=-0,70$ (€).

Problème **11 points**

Partie A : résolution d'une équation différentielle

1. On sait que les solutions de cette équation différentielle linéaire du premier ordre sont : $y=K\text{e}^{-2x}$, $K\in\mathbb{R}$.
2. $u(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}\Rightarrow u'(x)=\dfrac{1}{2}$; donc

   $u'(x)+2u(x)=\dfrac{1}{2}+2\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{2}+x-\dfrac{1}{2}=x$: $u(x)$ est donc solution de (E_1).
3. $\varphi_x=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}+C\text{e}^{-2x}$, donc

   $\varphi_0=0-\dfrac{1}{4}+C\text{e}^{-2\times 0}=-\dfrac{1}{4}+C=\dfrac{3}{4}\iff C=1$.

   Conclusion : $\varphi_x=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}+\text{e}^{-2x}$.

Partie B : étude d'une fonction
medskip

1. Étude des limites de la fonction f

   a. $\lim\limits_{x\to+\infty}-2x=-\infty$ et $\lim\limits_{u\to-\infty}\text{e}^u=0$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$,
   $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

   b. On a $\text{e}^{-2x}\times\text{e}^{2x}=1$, donc

   $f(x)=\dfrac{1}{2}x\text{e}^{-2x}\times\text{e}^{2x}-\dfrac{1}{4}\text{e}^{-2x}\times\text{e}^{2x}+\text{e}^{-2x}=\text{e}^{-2x}\left(\dfrac{1}{2}x\text{e}^{2x}-\dfrac{1}{4}\text{e}^{2x}+1\right)$.

   Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\text{e}^{2x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}x\text{e}^{2x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}x\text{e}^{2x}-\dfrac{1}{4}\text{e}^{2x}+1\right)=1$ et comme

   $\lim\limits_{x\to-\infty}\text{e}^{-2x}=+\infty$, on a finalement : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

c. On a $d(x) = f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\right) = \mathrm{e}^{-2x}$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$.

Ceci montre que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

2. Étude des variations de la fonction f

a. $f'(x) = \dfrac{1}{2} - 2\mathrm{e}^{-2x}$.

b. $\mathrm{e}^{-2x} \leqslant \dfrac{1}{4} \Rightarrow -2x \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{4}\right) \iff -2x \leqslant -\ln 4 \iff 2x \geqslant \ln 4 \iff$

$x \geqslant \dfrac{\ln 4}{2} \iff x \geqslant \dfrac{2\ln 2}{2} \iff x \geqslant \ln 2$.

Or $f'(x) \geqslant 0 \iff \dfrac{1}{2} - 2\mathrm{e}^{-2x} \geqslant 0 \iff \dfrac{1}{2} \geqslant 2\mathrm{e}^{-2x} \iff \mathrm{e}^{-2x} \leqslant \dfrac{1}{4}$.

D'après la résolution précédente on a donc :

$f'(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant \ln 2$ et de la même façon $f'(x) \leqslant 0 \iff x \leqslant \ln 2$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$					
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{\ln 2}{2}$	↗	$+\infty$

c. On a $f(0) = -\dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{3}{4}$; $f'(0) = \dfrac{1}{2} - 2 = -\dfrac{3}{2}$; une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0 est donc :

$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \iff y - \dfrac{3}{4} = -\dfrac{3}{2}x \iff y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{4}$.

d. On a $\ln 2 \approx 0,69$, donc $\ln 2 < 1$. Sur l'intervalle $[1~;~2]$ la fonction f est donc croissante.

D'autre part $f(1) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \mathrm{e}^{-2} \approx 0,38 < \dfrac{1}{2}$ et $f(2) = 1 - \dfrac{1}{4} + \mathrm{e}^{-8} \approx 0,75 > \dfrac{1}{2}$.

Il existe donc un réel unique α de l'intervalle $[1~;~2]$ tel que $f(\alpha) = \dfrac{1}{2}$.

La calculatrice donne $f(1,3) \approx 0,47$ et $f(1,4) \approx 1,51$, donc $1,3 < \alpha < 1,4$.

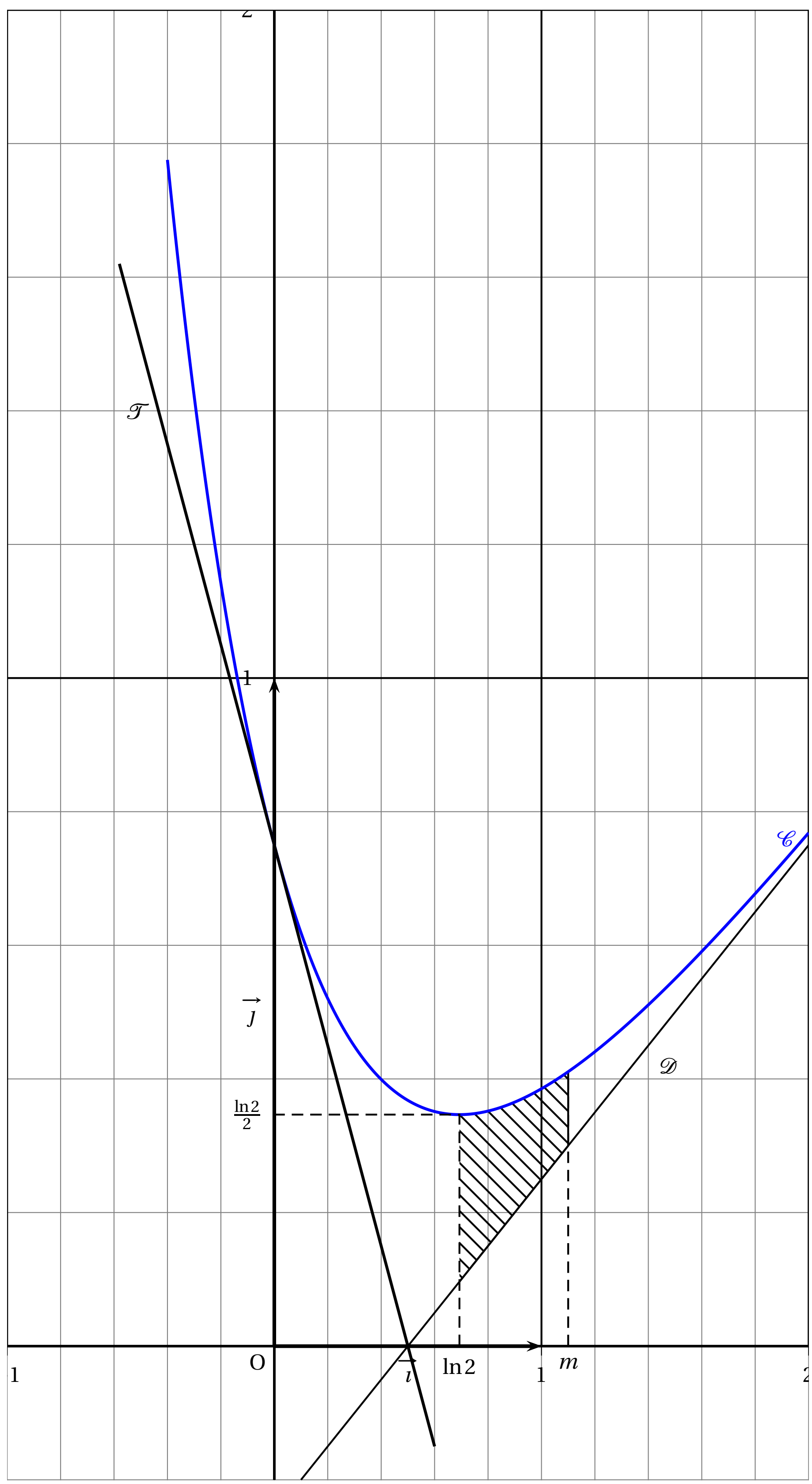
De même $f(1,37) \approx 0,499$ et $f(1,38) \approx 1,503$, donc $1,37 < \alpha < 1,38$.

3. Voir plus bas.

Partie C : Calcul d'une aire

1. On a vu que sur $]\ln 2~;~+\infty[$, $f(x) > 0$, donc l'aire du domaine en unité d'aire est égale à $\mathcal{A}(m) = \displaystyle\int_{\ln 2}^{m} \left[f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\right)\right] \mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^{m} \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_{\ln 2}^{m} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2m} + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\ln 2} = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2m}$.

2. On sait que $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \mathrm{e}^{-2m} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \mathcal{A}(m) = \dfrac{1}{8}$.


$\mathscr{T}$
1
$\vec{j}$
$\frac{\ln 2}{2}$
$\mathscr{C}$
$\mathscr{D}$
O
$\vec{\imath}$
$\ln 2$
1
m