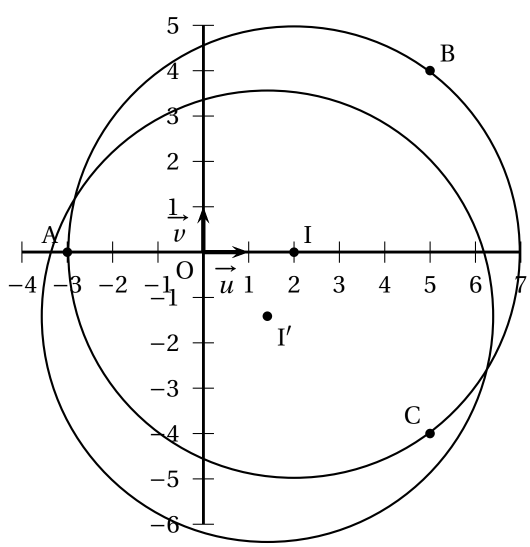
Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Nouvelle-Calédonie novembre 2008 Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

1. $z^2 - 10z + 41 = 0 \iff (z-5)^2 - 25 + 41 = 0 \iff (z-5)^2 + 16 = 0 \iff (z-5)^2 - (4\text{i})^2 = 0 \iff (z-5+\text{i})(z-5-\text{i}) = 0$.
   Il y a donc deux solutions complexes conjuguées $z_1 = 5+4\text{i}$ et $z_2 = 5-4\text{i}$.
2. **a.** $P(-3) = -27 - 63 - 33 + 123 = 0$. On peut donc factoriser $P(z)$ par $(z-(-3)) = z+3$.
   b. $(z+3)\left(z^2 - 10z + 41\right) = z^3 - 10z^2 + 41z + 3z^2 - 30z + 123 = z^3 - 7z^2 + 11z + 123 = P(z)$.
   c. $P(z) = 0 \iff (z+3)\left(z^2-10z+41\right) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z+3 & = & 0 \\ z^2 - 10z + 41 & = & 0 \end{array}\right. \iff$
   $z = -3 \quad \text{ou} \quad z = 5+4\text{i} \quad \text{ou} \quad z = 5-4\text{i}$.
3. **a.** On calcule :
   $|z_A - 2| = |-3-2| = |-5| = 5$;
   $|z_B - 2| = |5+4\text{i}-2| = |3+4\text{i}| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$;
   $|z_C| = |5-4\text{i}-2| = |3-4\text{i}| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$.
   b. Voir la figure
   c. Si M a pour affixe z : $|z-2| = 5 \iff \text{I}M = 5$ ce qui signifie que M est sur le cercle de centre I et de rayon 5.
   d. Voir la figure
4. **a.** $\mathscr{R}$ est la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.
   b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   L'image par $\mathscr{R}$ du cercle de centre I de rayon et un cercle de même rayon et de centre $\mathscr{R}(\text{I}) = \text{I}'$.
   Or $z_{\text{I}'} = z_{\text{I}}\text{e}^{-\frac{\pi}{4}\text{i}} = 2\left(\cos -\frac{\pi}{4} + \text{i}\sin -\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - \text{i}\sqrt{2}$.



EXERCICE 2 **4 points**

1. **a.** L'issue Rouge conduit à une perte de 1 € ; $X = -1$;
L'issue Blanche conduit à une perte de 0 € ; $X = 0$;
L'issue Jaune conduit à un gain de $5 - 1$ € ; $X = 4$;
L'issue Verte conduit à un gain de $8 - 1$ € ; $X = 7$.

b. Le gain de 4 € correspond à une sortie Jaune ; or il y a 4 cases jaunes sur 30 ; donc
$P(X = 4) = \dfrac{4}{30} = \dfrac{2}{15}$.

c. On a de même $P(X = -1) = \dfrac{18}{30} = \dfrac{9}{15}$.
$P(X = 0) = \dfrac{6}{30} = \dfrac{3}{15}$.
Il en résulte que $P(X = 7) = \dfrac{2}{30} = \dfrac{1}{15}$.
D'où le tableau :

x_i	-1	0	4	7
$P(X = x_i)$	$\dfrac{9}{15}$	$\dfrac{3}{15}$	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{1}{15}$

2. Le tableau devient :

x_i	$-q$	0	$q-5$	$q-7$
$P(X = x_i)$	$\dfrac{9}{15}$	$\dfrac{3}{15}$	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{1}{15}$

Le jeu est équitable si l'espérance mathématique est nulle, soit
$-q \times \dfrac{9}{15} + 0 \times \dfrac{3}{15} + (5-q) \times \dfrac{2}{15} + (7-q) \times \dfrac{1}{15} = 0 \iff \dfrac{-9q + 10 - 2q + 7 - q}{15} = 0 \iff$
$\dfrac{17 - 12q}{15} = 0 \iff q = \dfrac{17}{12} \approx 1{,}42$ €.

PROBLÈME **11 points**

Partie I : étude d'une fonction auxiliaire

1. $g'(x) = -\dfrac{1}{x} + 4x = \dfrac{-1 + 4x^2}{x} = \dfrac{(2x+1)(2x-1)}{x}$.
2. Comme $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $(2x+1)(2x-1)$, trinôme qui s'annule pour $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = \dfrac{1}{2}$ et qui est positif sauf entre les deux racines.
$g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + 2 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{2} + \ln 2$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$					
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2} + \ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Comme $\dfrac{3}{2} + \ln 2 \approx 2{,}49 > 0$, on peut dire que pour tout x de $]0 ; +\infty$, $g(x) > 0$.

Partie II : étude de la fonction f

1. On sait que $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ et finalement $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.
   Conclusion : l'axe des ordonnées est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de 0.
2. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
   Soir la fonction d définie par : $d(x) = f(x) - (2x-3) = \dfrac{\ln x}{x} + 2x - 3 - 2x + 3 = \dfrac{\ln x}{x}$.
   Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, il en résulte que la droite Δ d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.
3. $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} + 2 = \dfrac{1 - \ln x}{x} + 2 = \dfrac{1 - 2\ln x + 2x^2}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
4. Comme $x^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$; or on a vu que $g(x) > 0$, donc la dérivée $f'(x)$ est positive et la fonction f croissante sur $]0~;~+\infty[$.
5. **a.** $\text{A}\left(\text{e}~;~\text{e}^{-1} + 2\text{e} - 3\right) \approx (2,72~;~2,80)$ et $\text{B}\left(\sqrt{\text{e}}~;~\frac{1}{2\text{e}+2\sqrt{\text{e}}-3}\right) \approx (1,65~;~0,60)$.
   b. La fonction f étant croissante sur $]0~;~+\infty[$, l'est sur $[\sqrt{\text{e}}~;~\text{e}]$. Donc $\sqrt{\text{e}} \leqslant x \leqslant \text{e} \Rightarrow f\left(\sqrt{\text{e}}\right) \leqslant f(x) f(\text{e})$. Comme $f\left(\sqrt{\text{e}}\right) \approx 0,48 > 0$, on en déduit que $f(x) > 0$ sur $]0~;~+\infty[$.
6. Voir figure.
7. **a.** A a pour abscisse e ; or $f'(\text{e}) = \dfrac{g(\text{e})}{\text{e}^2} = \dfrac{2\text{e}^2}{\text{e}^2} = 2$.
   Mais la droite Δ a pour coefficient directeur 2, donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A est parallèle à la droite Δ.
   b. Les points cherchés de $\mathscr{C}$ d'abscisses x sont les points où le nombre dérivé de la fonction f est égal au coefficient directeur de la droite Δ soit 2.
   Il faut donc résoudre sur $]0~;~+\infty[$, $f'(x) = 2 \iff \dfrac{1 - \ln x + 2x^2}{x^2} = 2 \iff$
   $1 - \ln x + 2x^2 = 2x^2 \iff 1 = \ln x \iff x = \text{e}$.
   Conclusion : le point A est le seul point de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à Δ.

Partie III calcul d'aire

1. $K'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2 \times \dfrac{1}{x}(\ln x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
   K est donc une primitive de $\dfrac{\ln x}{x}$
2. D'après la question précédente, une primitive de f est
   $F(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2 + x^2 - 3x$.
3. **a.** On sait que l'aire en unité d'aire est égale à
   $\mathscr{A} = \displaystyle\int_{\sqrt{\text{e}}}^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2 + x^2 - 3x\right]_{\sqrt{\text{e}}}^{\text{e}} = \frac{1}{2} \times 1^2 + \text{e}^2 - 3\text{e} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} - \left(\sqrt{\text{e}}\right)^2 + 3\sqrt{\text{e}} =$
   $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8} + \text{e}^2 - 4\text{e} + 3\sqrt{\text{e}} = \dfrac{3}{8} + \text{e}^2 - 4\text{e} + 3\sqrt{\text{e}}$
   b. L'unité d'aire étant de $2 \times 1~\text{cm}^2$, $\mathscr{A} = 2\left(\dfrac{3}{8} + \text{e}^2 - 4\text{e} + 3\sqrt{\text{e}}\right) \approx 3,674~\text{cm}^2$ soit environ 3,67 cm^2 au mm^2 près.

c. On considère le trapèze ayant pour sommets les points A, B et les points de l'axe des abscisses ayant même abscisse que A et B.

$\mathscr{A}(\text{trapèze} = \dfrac{1}{2}\left(f(\text{e} - f\left(\sqrt{\text{e}}\right)\right) \times \left(\text{e} - \sqrt{\text{e}}\right) = \dfrac{\text{e} - \sqrt{\text{e}}}{2} \times \left(\text{e}^{-1} + 2\text{e} - 3 - \frac{1}{2\sqrt{\text{e}}} - 2\sqrt{\text{e}} + 3\right) \approx 1,502 \approx$ $1,82$ u. a. soit 3,64 cm^2.

Le résultat est proche de celui trouvé plus haut.