Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Génie mécanique, civil Métropole septembre 2009

EXERCICE 1 **4 points**

1. $f(x) = 2\cos\frac{x}{3}\cos\frac{\pi}{3} + 2\sin\frac{x}{3}\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{x}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{x}{3}$:réponse D.

2. On peut penser que la seule réponse est la réponse B. Vérification :
$f'(x) = -\frac{2}{3}\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ et $f''(x) = -\frac{2}{9}\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$.
On a effectivement $9f''(x) + f(x) = 0$.

3. La valeur moyenne est égale à $V_m = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^{\pi}\left[2\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right)\right]\,\mathrm{d}x =$
$\frac{1}{\pi}\left[6\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\pi} = \frac{6}{\pi}\left[\sin 0 - \sin\frac{\pi}{3}\right] = \frac{6}{\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$. Réponse a.

4. $f(x) = 0 \iff \cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \iff \cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{2}$ ou $\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{-\pi}{2}$ soit $\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ et finalement $x = 3\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + 6k\pi = \frac{5\pi}{2} + 6k\pi$ ou
$x = 3\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + 6k\pi = -\frac{\pi}{2} + 6k\pi$.
Donc la seule solution dans l'intervalle $[-\pi\,;\,+\pi]$ est $-\frac{\pi}{2}$. Réponse D.

EXERCICE 2 **4 points**

1. **a.** On a $2\,069 - 2\,056 = 13$; $2\,082 - 2\,069 = 13$ et $2\,095 - 2\,082 = 13$.
La suite est donc une suite arithmétique de raison 13.
   b. On trouve de même que la suite est donc une suite arithmétique de raison 35.
2. Si $u_1 = 1\,770$, on sait que $u_n = u_1 + 35(n-1)$.
Donc $2\,050 = 1\,770 + 35n - 35 \iff 35n = 315 \iff n = 9$.
2 050 est donc le 9e terme de la suite.
3. **a.** Le premier terme étant A_1, on a $A_n = A_1 + 13(n-1) = 2\,056 + 13n - 13 = 2\,043 + 13n$.
   b. De même $B_n = B_1 + 35(n-1) = 1\,770 + 35n - 35 = 1\,735 + 35n$.
   c. Il faut résoudre dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $1\,735 + 35n \geqslant 2\,043 + 13n \iff 22n \geqslant 308 \iff 11n \geqslant 154 \iff n \geqslant 14$.
La production de la chaîne B sera supérieure à celle de la chaîne A à partir de 14 ans soit en février 2010.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

1. $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+k)\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1 = (1-k-x)\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1$
2. On calcule $f'(x) + f(x) = (1-k-x)\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1 + (x+k)\mathrm{e}^{-x} + x^2 - x + 1 =$
   $\mathrm{e}^{-x} + x^2 + x$.
   Donc la fonction f est bien une solution de (E).
3. $f(0) = 1 \iff k\mathrm{e}^0 + 1 = 1 \iff k + 1 = 1 \iff k = 0$.

Partie B

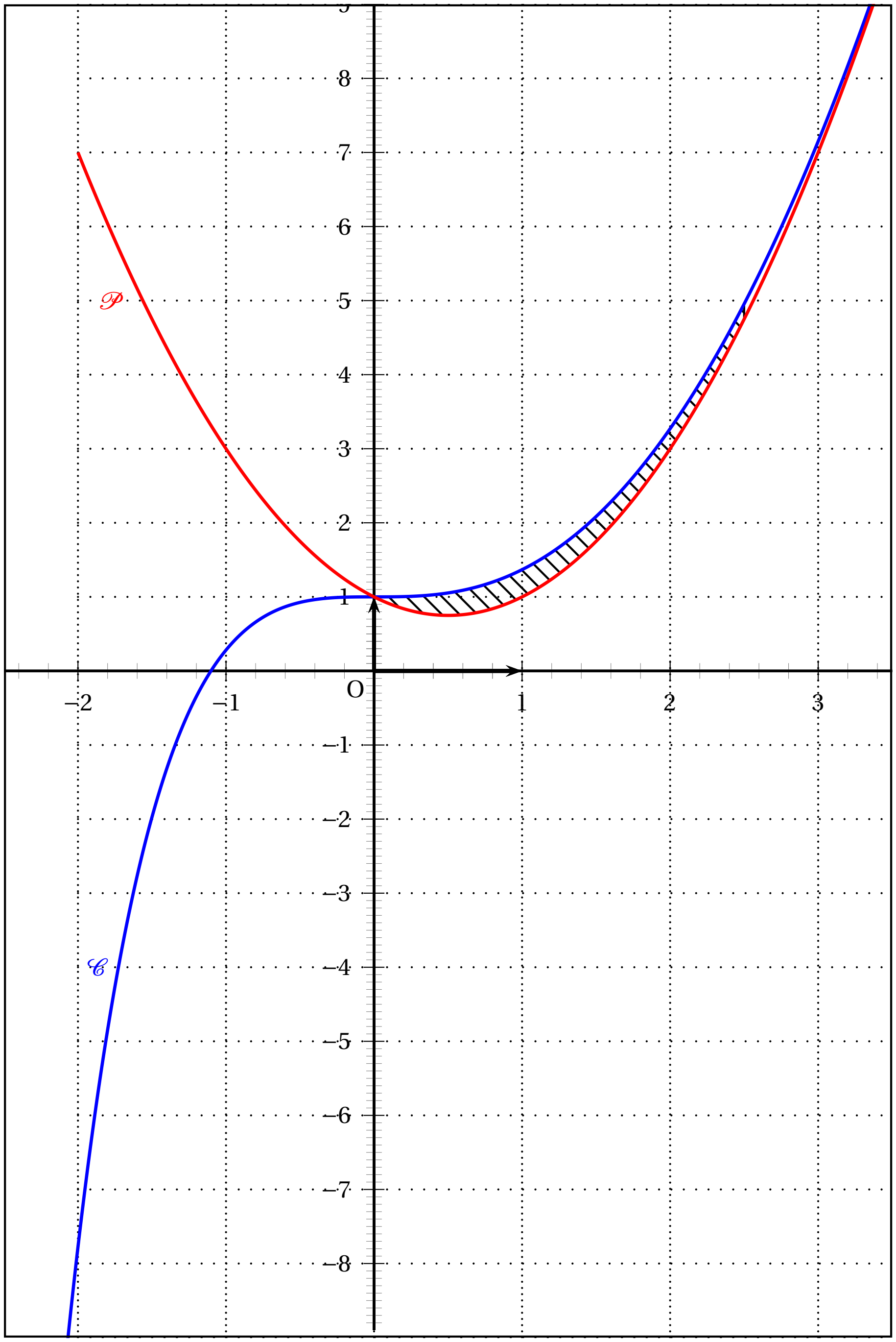
1. **a.** On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
   On a $g(x) = x^2\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 1$, donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
   b. $f(x) - g(x) = x\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.
   Ceci signifie que la courbe $\mathscr{P}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.
   c. $f(x) - g(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ qui est du signe de x car $\mathrm{e}^{-x} > 0$ quel que soit le réel x.
   Donc $x < 0 \Rightarrow f(x) - g(x) < 0$, ce qui signifie que $\mathscr{C}$ est au dessous de $\mathscr{P}$;
   $x > 0 \Rightarrow f(x) - g(x) > 0$, ce qui signifie que $\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{P}$.
2. **a.** Le calcul a déjà été fait au dessus : il suffit de remplacer k par 0.
   b. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est égal à $f'(0) = 1 + 0 - 1 = 0$, ce qui signifie que la tangente est horizontale.
3. Sur la feuille annexe :
   a. Voir plus bas.
   b. Voir plus bas.

Partie C

1. On a $H'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (-x-1)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x} = f(x)$.
   Ceci montre que la fonction H est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. **a.** Voir la figure
   b. On a $\alpha \geqslant 2 > 0$; on sait donc que sur l'intervalle $[0 ; \alpha[$ la différence $f(x) - g(x)$ est positive ; donc l'aire de la partie A est égale en unité d'aire à :
   $\mathscr{A}(\mathrm{A}) = \displaystyle\int_0^\alpha \left[f(x) - g(x)\right] \mathrm{d}x = \int_0^\alpha x\mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = \int_0^\alpha h(x) \mathrm{d}x = [H(x)]_0^\alpha = H(\alpha) - H(0) =$
   $(-\alpha - 1)\mathrm{e}^{-\alpha} + 1 = 1 - (\alpha+1)\mathrm{e}^{-\alpha}$.
   c. Comme $\alpha\mathrm{e}^{-\alpha} = \dfrac{\alpha}{\mathrm{e}^\alpha}$ et on a vu que $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \dfrac{\alpha}{\mathrm{e}^\alpha} = 0$.
   On a aussi $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha} = 0$, donc $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \left(-\alpha\mathrm{e}^{-\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha} + 1\right) = 1$.
   d. L'unité d'aire est égale à $1 \times 2 = 2 \left(\text{cm}^2\right)$.
   Conclusion la limite de l'aire de A est égale à 2 cm^2.

FEUILLE ANNEXE À RENDRE OBLIGATOIREMENT AVEC LA COPIE

x	-2	$-1,5$	$-1,1$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	$-7,78$	$-1,97$	$0,01$	0,28	0,93	1	1,05	1,37	2,08	3,27	4,96	7,15


$\mathscr{P}$
$\mathscr{C}$
O
−2
−1
1
2
3
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8