Durée : 4 heures

∽ Corrigé du baccalauréat STI Polynésie juin 2009 ∾ Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

1. **a.** $P(3) = 3^3 - 7 \times 3^2 + 20 \times 3 - 24 = 27 - 63 + 60 - 24 = 87 - 87 = 0$.

   b. On a donc $P(z) = z^3 - 7z^2 + 20z - 24 = (z-3)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right) = z^3 - \alpha z^2 + \beta z - 3z^2 - 3\alpha z - 3\beta = z^3 - \left(\alpha + 3\right)z^2 + (\beta - 3\alpha)z - 3\beta$.

   En identifiant, on obtient :

   $$\left\{\begin{array}{lcl} -7 & = & \alpha - 3 \\ 20 & = & \beta - 3\alpha \\ -24 & = & -3\beta \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -4 & = & \alpha \\ 20 & = & \beta - 3\alpha \\ 8 & = & 8\beta \end{array}\right.$$

   Donc $P(z) = (z-3)\left(z^2 - 4z + 8\right)$.

   c. Il en résulte que $P(z) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z - 3 & = & 0 \\ z^2 - 4z + 8 & = & 0 \end{array}\right.$

   Résolution de l'équation du second degré :

   $z^2 - 4z + 8 = 0 \iff (z-2)^2 - 4 + 8 = 0 \iff (z-2)^2 + 4 = 0 \iff$
   $(z-2)^2 - (2\mathrm{i})^2 = 0 \iff (z - 2 - 2\mathrm{i})(z - 2 + 2\mathrm{i}) = 0$.

   Finalement : $S = \{3\ ;\ 2 + 2\mathrm{i}\ ;\ 2 - 2\mathrm{i}\}$.

2. **a.** Voir la figure.

   b. On a $|b|^2 = 4 + 4 = 4 \times 2 \Rightarrow |b| = 2\sqrt{2}$.

   On peut écrire $b = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

   Un argument de b est donc $\dfrac{\pi}{4}$.

   c. c étant le conjugué de b, $|c| = 2\sqrt{2}$ et un argument de c est $-\dfrac{\pi}{4}$.

   d. $|b| = \mathrm{OB} = |c| = \mathrm{OC}$; le triangle OBC est donc isocèle en O.

   De plus $\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

   Le triangle isocèle OBC est rectangle en O.

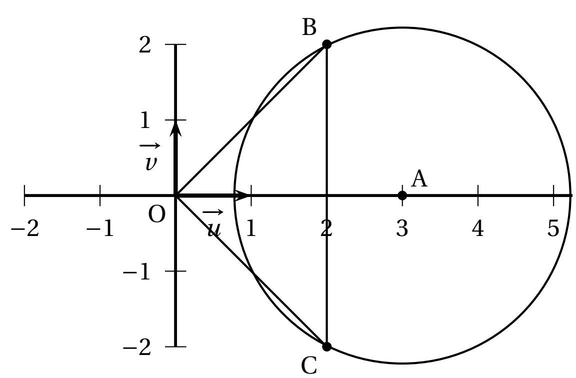
3. **a.** $|b-3|^2 = |-1 + 2\mathrm{i}|^2 = 1 + 4 = 5$, donc $|b-3| = \sqrt{5}$;

   De même $|c-3|^2 = |-1 - 2\mathrm{i}|^2 = 1 + 4 = 5$, donc $|c-3| = \sqrt{5}$.

   Conclusion B et C appartiennent à $\mathscr{E}$.

   b. On a pour un point M d'affixe z, $|z - 3| = \sqrt{5} \iff \mathrm{A}M = \sqrt{5}$.

   L'ensemble $\mathscr{E}$ est donc le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{5}$.



EXERCICE 2 **4 points**

1. (0, B) (0, J) (0, R) (5, B) (5, J) (5, R) (10, B) (10, J) (10, R)
2. Les gains possibles sont : -5 ; 0 ; 5 ; 10; 25
3. 0.8|*6>X|

x_i	-5	0	5	10	25
$p(X = x_i)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

4. On a $\text{E}(X) = -5 \times \dfrac{5}{9} + 0 \times \dfrac{1}{9} + 5 \times \dfrac{1}{9} + 10 \times \dfrac{1}{9} + 25 \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{15}{9} = \dfrac{5}{3}$ (€).
5. En moyenne sur un grand nombre de parties le joueur gagnera en moyenne 5 €toutes les trois parties; il va donc devenir riche? (quand est-on riche?)

PROBLÈME **11 points**

Partie A : Étude sommaire d'une fonction g

1. g est de la forme $\text{e}^{u(x)}$ avec u dérivable et de dérivée $u'(x) \times \text{e}^{u(x)}$.
   Donc $g'(x) = \left(3x^2 - 1\right)\text{e}^{x^3-x-5}$.
2. P est un trinôme qui s'annule en $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Il est positif sauf entre les racines.
   - sur $]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{\sqrt{3}}[$, $P(x) > 0$;
   - $P\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = P\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$;
   - sur $\left]-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;\,\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[$, $P(x) < 0$;
   - sur $\left]\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;\,+\infty\right[$, $P(x) > 0$.
3. Comme $\text{e}^u > 0$, quel que soit $u \in \mathbb{R}$, le signe de $g'(x)$ est celui de $3x^2 - 1$, c'est-à-dire celui de $P(x)$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−		+	0
$g(x)$		↗		↘		↗	

4.

5. L'impression est fausse puisque sur $\left]-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;\,\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[$, la fonction est décroissante.

Partie B : Étude de quelques propriétés d'une fonction f

1. Étude des variations de f

a. On a $f'(x) = -\ln x - x \times \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3} = -\ln x - 1 + \dfrac{1}{3} = -\ln x - \dfrac{2}{3}$.

b. $-\ln x - \dfrac{2}{3} > 0 \iff -\dfrac{2}{3} > \ln x \iff \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}} > \mathrm{e}^{\ln x} \iff x < \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}$.

Donc dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left]0\ ;\ \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}\right[$.

c. Sur l'intervalle précédent la dérivée de f est négative, donc f est décroissante. Ensuite elle est croissante.

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$1+\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}$	$\searrow$	

$+\infty$

2. Calcul d'une aire

a. Voir la figure.

b. $H'(x) = 2x\ln x + x^2 \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{2x}{2} = 2x\ln x + x - x = 2x\ln x$.

Comme $x\ln x = \dfrac{1}{2}H'(x)$, une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ est $-\dfrac{1}{2}x^2\ln x + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{6}x^2 + x$.

c. L'aire cherchées est en unités d'aire égale à l'intégrale $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{1}{2}x^2\ln x - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{6}x^2 + x\right]_1^2 =$ $-\dfrac{1}{2} \times 4\ln 4 + 1 + \dfrac{4}{6} + 2 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{6} - 1 = \dfrac{9}{4} - 2\ln 2$(u. a.).

Partie C ; Résolution de l'équation $f(x) = g(x)$ sur l'intervalle $[1\,;2]$

1. On a $h(x) = g(x) - f(x)$, donc $h'(x) = g'(x) - f'(x) = \left(3x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{x^3-x-5} + \ln x + \dfrac{2}{3}x$.

Sur $[1\,;2]$, on a vu que $3x^2 - 1 >$, donc tous les termes de $h'(x)$ sont supérieurs à zéro, donc $h'(x) > 0$.

2. La fonction h est donc croissante sur $[1\,;2]$, $h(1) \approx -1 < 0$, et $h(2) \approx 2 > 0$. Comme h est dérivable sur $[1\,;2]$ elle s'annule une seule fois dans cet intervalle en $\alpha \in [1\ ;\ 2]$

3. La calculatrice donne $1{,}83 < \alpha < 1{,}84$ et au centième près $\alpha \approx 1{,}83$.

Feuille annexe à compléter et à rendre avec la copie