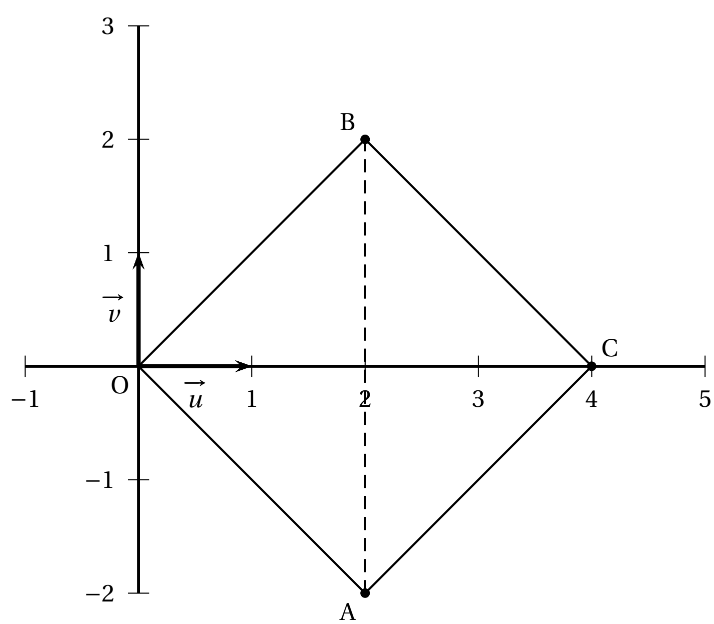
Corrigé du baccalauréat STI Métropole septembre 2008
Génie électronique, électrotechnique et optique

1. $z^2 - 4z + 8 = 0 \iff (z-2)^2 - 4 + 8 = 0 \iff (z-2)^2 + 4 = 0 \iff (z-2)^2 - (2\text{i})^2 = 0 \iff (z-2+2\text{i})(z-2-2\text{i}) = 0$.
   L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées : $2-2\text{i}$ et $2+2\text{i}$.
2. Voir plus bas.
3. $|z_{\text{A}}|^2 = 4 + 4 = 4 \times 2 \Rightarrow |z_{\text{A}}| = 2\sqrt{2}$.
   On peut alors écrire $z_{\text{A}} = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos -\frac{\pi}{4} + \text{i}\sin -\frac{\pi}{4}\right)$.
   Un argument de z_{A} est donc $-\dfrac{\pi}{4}$.
   Comme $z_{\text{B}} = \overline{z_{\text{A}}}$, on a :
   $|z_{\text{A}}| = 2\sqrt{2}$ et un argument de z_{B} est égal à $\dfrac{\pi}{4}$
4. **a.** La question précédente montre que :
   $z_{\text{A}} = 2\sqrt{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_{\text{B}} = 2\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$.
   b. On a vu que $\text{OA} = \text{OB} = 2\sqrt{2}$; d'autre part $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\ ;\ \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.
   B est donc l'image de A dan s la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ (autrement dit un quart de tour).
5. Le triangle OAB est isocèle d'angle au sommet de mesure 90 ° : il est donc rectangle isocèle en O.
6. [AB] et [OC] ont le même milieu : le point d'affixe 2 : OACB est donc un parallélogramme; comme il a un angle droit, c'est un rectangle et comme il a deux côtés consécutifs de même longueur, c'est un losange : c'est donc un carré.



EXERCICE 2 **5 points**

1.

Nombre d'ordinateurs	R_3 se produit	R_3 ne se produit pas	Total
R_2 se produit	1	9	10
R_2 ne se produit pas	19	971	990
Total	20	980	1 000

2. **a.** D'après le tableau 971 ordinateurs n'ont eu aucune panne durant les trois premières années, donc $p(X=0) = \dfrac{971}{1\,000} = 0,971$.

b. De la même façon : $p(X=150) = \dfrac{9}{1\,000} = 0,009$.

$p(X=200) = \dfrac{19}{1\,000} = 0,019$.

$p(X=350) = \dfrac{1}{1\,000} = 0,001$. D'où le tableau :

x_i	0	150	200	350
$p(X=x_i)$	0,971	0,009	0,019	0,001

c. On a $\text{E}(X) = 0\times 0,971 + 150\times 0,009 + 200\times 0,019 + 350\times 0,001 =$
$1,35 + 3,8 + 0,35 = 5,50$ (€).

3. En moyenne le coût de réparation d'un ordinateur sera de 5,50 € ; l'extension de garantie est nettement plus chère.

PROBLÈME **10 points**

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

1. On sait que les solutions de cette équation différentielle linéaire du premier ordre est :

$$y = C\text{e}^{-5x},\ C \in \mathbb{R}$$

2. Si $u(x) = ax^3 + b$, alors $u'(x) = 3ax^2$. Donc u est solution de (E) $\iff$

$$3ax^2 + 5\left(ax^3 + b\right) = 5x^3 + 3x^2 + 5 \iff 5ax^3 + 3ax^2 + 5b = 5x^3 + 3x^2 + 5 \iff \left\{\begin{array}{rcl} 5a & = & 5 \\ 3a & = & 3 \\ 5b & = & 5 \end{array}\right.$$

$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ a & = & 1 \\ b & = & 1 \end{array}\right.$ Conclusion : $u(x) = x^3 + 1$ est solution de E.

3. **a.** $h(x)$ vérifie (E) $\iff h'(x) + 5h(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5 \iff -5k\text{e}^{-5x} + 3x^2 + 5kx\text{e}^{-5x} + 5x^3 + 5 = 5x^3 + 3x^2 + 5 \iff (5k - 5k)\text{e}^{-5x} + 5x^3 + 3x^2 + 5 = 5x^3 + 3x^2 + 5 \iff 5x^3 + 3x^2 + 5 = 5x^3 + 3x^2 + 5$, qui est bien vraie.
$h(x) = k\text{e}^{-5x} + x^3 + 1$ est une solution de (E).

b. $h(0) = -2 \iff k + 1 = -2 \iff k = -3$

Partie B : Étude de la fonction *f*

1. **a.** On sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{e}^{-5x} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -3\text{e}^{-5x} = -\infty$, et
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^{-5x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. **a.** $f'(x) = -3\times(-5)\text{e}^{-5x} + 3x^2 = 15\text{e}^{-5x} + 3x^2$.
On a $\text{e}^{-5x} > 0 \Rightarrow 15\text{e}^{-5x} > 0$, et $r3x^2 \geqslant 0$, donc par somme $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

b.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. **a.** $f(0) = -3 + 1 = -2$ et $f(1) = -3\mathrm{e}^{-5} + 1 + 1 = 2 - 3\mathrm{e}^{-5} \approx 1,98$.

   b. La fonction f est dérivable et croissante sur $[0~;~1]$, avec $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$. Il existe donc un réel unique α de $[0~;~1]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

   c. La calculatrice donne $f(0,2) \approx -0,086$ et $f(0,3) \approx 0,36$ donc

$$0,2 < \alpha < 0,3.$$

   $f(0,21) \approx -0,04$ et $f(0,22) \approx 0,01$, donc $0,21 < \alpha < 0,22$.

   d. La fonction ne s'annulant qu'en α et étant croissante sur $\mathbb{R}$:
   $x < \alpha \Rightarrow f(x) < 0$;
   $x > \alpha \Rightarrow f(x) > 0$.

Partie C : Courbe représentative de la fonction *f*

1. **a.**

   b. $d(x) = f(x) - u(x) = -3\mathrm{e}^{-5x} < 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.
   Ceci montre que la courbe $\mathscr{C}$ est sous la courbe Γ quel que soit x.

2.

x	$-0,2$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
$f(x)$	$-7,16$	-2	$-0,10$	0,66	1,07	1,46	1,98	2,72

3. Voir plus bas

Partie D : Calcul d'une aire

1. Voir figure

2. On a $\mathscr{A}(\mathscr{P}) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   Une primitive de e^{-5x} est $-\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-5x}$, donc une primitive de $-3\mathrm{e}^{-5x}$ est $\dfrac{3}{5}\mathrm{e}^{-5x}$.

   $\mathscr{A}(\mathscr{P}) = \left[\dfrac{3}{5}\mathrm{e}^{-5x} + \dfrac{x^4}{4} + x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \dfrac{3}{5}\mathrm{e}^{-5} + \dfrac{1}{4} + 1 - \left(\dfrac{3}{5}\mathrm{e}^{-5\frac{1}{2}} + \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4} + \dfrac{1}{2}\right) =$
   $\dfrac{3}{5}\mathrm{e}^{-5} + \dfrac{1}{4} + 1 - \dfrac{3}{5}\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}} - \dfrac{1}{64} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{47}{64} + \dfrac{3}{5}\mathrm{e}^{-5} - \dfrac{3}{5}\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}}$ (u. a.).

FEUILLE ANNEXE DU PROBLÈME
À REMETTRE AVEC LA COPIE