∽ Corrigé du baccalauréat STL Biotechnologies ∾ 19 juin 2013 Antilles-Guyane

EXERCICE 1 **5 points**

Suite à un gros orage, la plage municipale de la commune d'Aistéhel subit une pollution momentanée du fait du débordement de la station d'épuration.

La concentration en bactéries E. coli (Escherichia coli) est retenue comme indicateur de contamination d'origine fécale.

Rappel (simplifié) des normes de qualité des eaux de baignade :

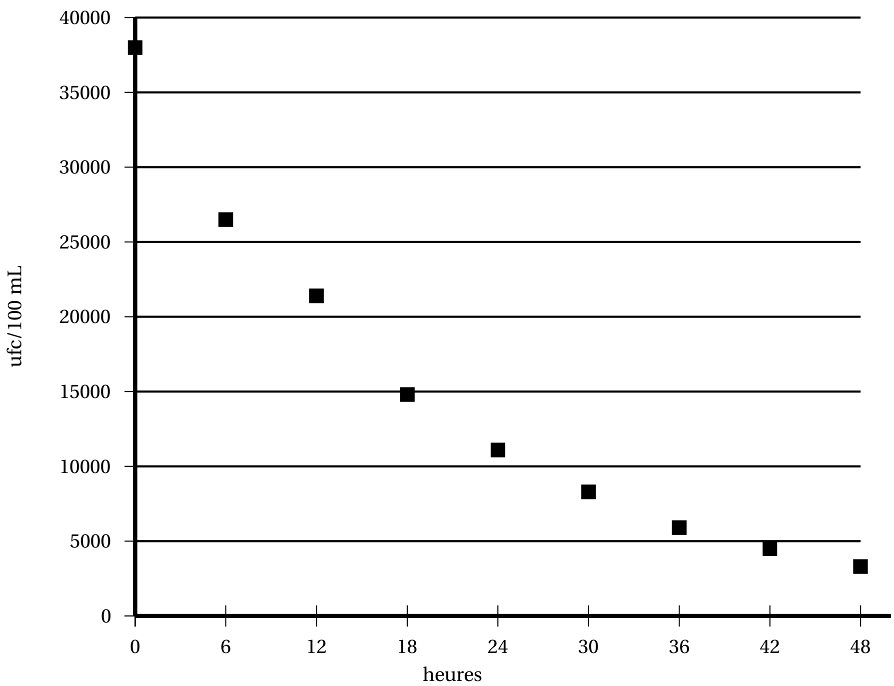
Qualité de l'eau	bonne	moyenne	mauvaise
Concentration en E. coli en ufc/100 mL(*)	0 à 100	100 à 2 000	supérieure à 2 000

(*) *ufc : unités formant colonies*

Des analyses sont faites toutes les six heures afin de suivre l'évolution de la concentration en E. coli.
Les mesures des deux premiers jours sont rassemblées dans le tableau ci-dessous.

Durée écoulée en heures (t_i)	0	6	12	18	24	30	36	42	48
Concentration en E. coli (y_i) (ufc/100 mL)	38 000	26 500	21 400	14 800	11 100	8 300	5 900	4 500	3 300

Ces mesures sont représentées graphiquement ci-dessous.



Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante

PARTIE A :

1. Un ajustement affine ne paraît pas approprié puisque les points ne sont pas alignés ou ne donnent pas une allure de droite.

2. On propose de réaliser un ajustement exponentiel. Pour cela, on pose $z_i = \ln(y_i)$ où y_i désigne la i-ème mesure de la concentration en E. coli.

   a. Complétons le tableau suivant :

t_i (en heures)	0	6	12	18	24	30	36	42	48
$z_i = \ln(y_i)$	10,545	10,185	9,971	9,602	9,315	9,024	8,683	8,412	8,102

les résultats sont arrondis à 10^{-3} *près.*

b. À l'aide de la calculatrice, un ajustement affine de z en t selon la méthode des moindres carrés est

$$z = -0{,}051t + 10{,}532.$$

c. On considère désormais comme ajustement affine de z en t , la droite d'équation $z = -0{,}05t + 10{,}53$.

Nous savons que $z = \ln y$ par conséquent $y = \mathrm{e}^{z}$. En remplaçant z par sa valeur, nous obtenons

$$y(t) = \mathrm{e}^{-0{,}05t+10{,}53} = \mathrm{e}^{-0{,}05t}\mathrm{e}^{10{,}53} = 37\,421{,}47\mathrm{e}^{-0{,}05t}$$

Un ajustement exponentiel de la concentration en E. coli est $y(t) = 37\,421{,}47\mathrm{e}^{-0{,}05t}$.

d. Pour cette question, on prendra $y(t) = 37\,400\mathrm{e}^{-0{,}05t}$.

- En supposant que le modèle reste valide au-delà des deux premiers jours, la concentration attendue trois jours après le début des mesures est $y(72)$.

  $$y(72) = 37\,400\mathrm{e}^{-0{,}05\times 72} \approx 1\,021{,}91 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

- la concentration correspondra à une eau de baignade de bonne qualité lorsque $y(t) \leqslant 100$. Résolvons cette inéquation. $z = \ln 100 = 2\ln 10$ déterminons alors t pour que $-0{,}05t + 10{,}53 \leqslant 2\ln 10$.
  $t \geqslant \dfrac{2\ln 10 - 10{,}53}{-0{,}05}$ d'où $t \approx 118{,}49$.
  Autre méthode : $37\,400e^{-0{,}05t} \leqslant 100$; $\dfrac{374}{e^{0{,}05t}} \leqslant 1$; $e^{0{,}05t} \geqslant 374$; $0{,}05t \geqslant \ln 374$; $t \geqslant \dfrac{\ln 374}{0{,}05}$; $t \approx 118{,}49$.
  Au bout de 119 heures après le début des mesures, l'eau de baignade sera de bonne qualité.

PARTIE B :

On appelle (c_n) la concentration en E. coli au temps n (où n est le temps en heures).
Un technicien du laboratoire où sont réalisées les analyses propose de modéliser l'évolution de la concentration en E. coli par la suite géométrique (c_n) pour laquelle :

- $c_0 = 38\,000$
- la raison est $q = 0,947$.

Selon ce modèle nous avons $u_n = 38\,000 \times (0{,}947)^n$.
Au bout de 30 heures l'estimation est de $38\,000 \times (0{,}947)^{30} \approx 7\,417{,}93$.
Au bout de 48 heures l'estimation est de $38\,000 \times (0{,}947)^{48} \approx 2\,783{,}44$.
Au bout de 72 heures l'estimation est de $38\,000 \times (0{,}947)^{72} \approx 753{,}32$.
Ce second modèle semble peu approprié car nous sommes bien éloignés des données relevées.

EXERCICE 2 **4 points**

PARTIE A : Résolution d'une équation différentielle

Les fonctions intervenant dans cette partie sont définies sur $\mathbb{R}$.
On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 0,5y = 12$.

1. Déterminons une fonction constante solution de l'équation différentielle (E). Soit p une fonction constante. $p(t) = k$ donc $p'(t) = 0$

   Puisqu'elle est solution de l'équation différentielle (E) nous avons $0 + 0{,}5k = 12$ par conséquent $k = 24$ et par suite $p(t) = 24$.

2. Déterminons l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

Les solutions de l'équation (E) s'écrivent comme la somme des solutions de l'équation différentielle sans second membre et de la solution particulière p.

Les solutions de l'équation différentielle $y' + 0,5y = 0$ sont les fonctions définies par

$y(t) = C\mathrm{e}^{-0,5t}$ où C est une constante.

L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions y définies par

$y(t) = C\mathrm{e}^{-0,05t} + 24$ où C est une constante.

3. Déterminons la fonction c solution de l'équation différentielle (E) telle que $c(0) = 0$.

Elle vérifie $c(0) = C\mathrm{e}^{-0,5\times 0} + 24 = 0$ donc $C = -24$.

La fonction c solution de l'équation différentielle (E) telle que $c(0) = 0$ est définie par

$c(t) = -24\mathrm{e}^{-0,5t} + 24$ ou par $c(t) = 24(1 - \mathrm{e}^{-0,5t})$.

PARTIE B : Etude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 24\left(1 - \mathrm{e}^{-0,5t}\right)$.
On appelle f' la dérivée de la fonction f.

1. Calculons $f'(t)$

$f'(t) = 24\left(0 - (-0,5\mathrm{e}^{-0,5t})\right) = 12\mathrm{e}^{-0,5t}$;

étudions son signe sur $[0\,;\,+\infty[$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \mathrm{e}^x > 0$ par conséquent pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$, $\quad f'(t) > 0$.

2. Étudions le sens de variation de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

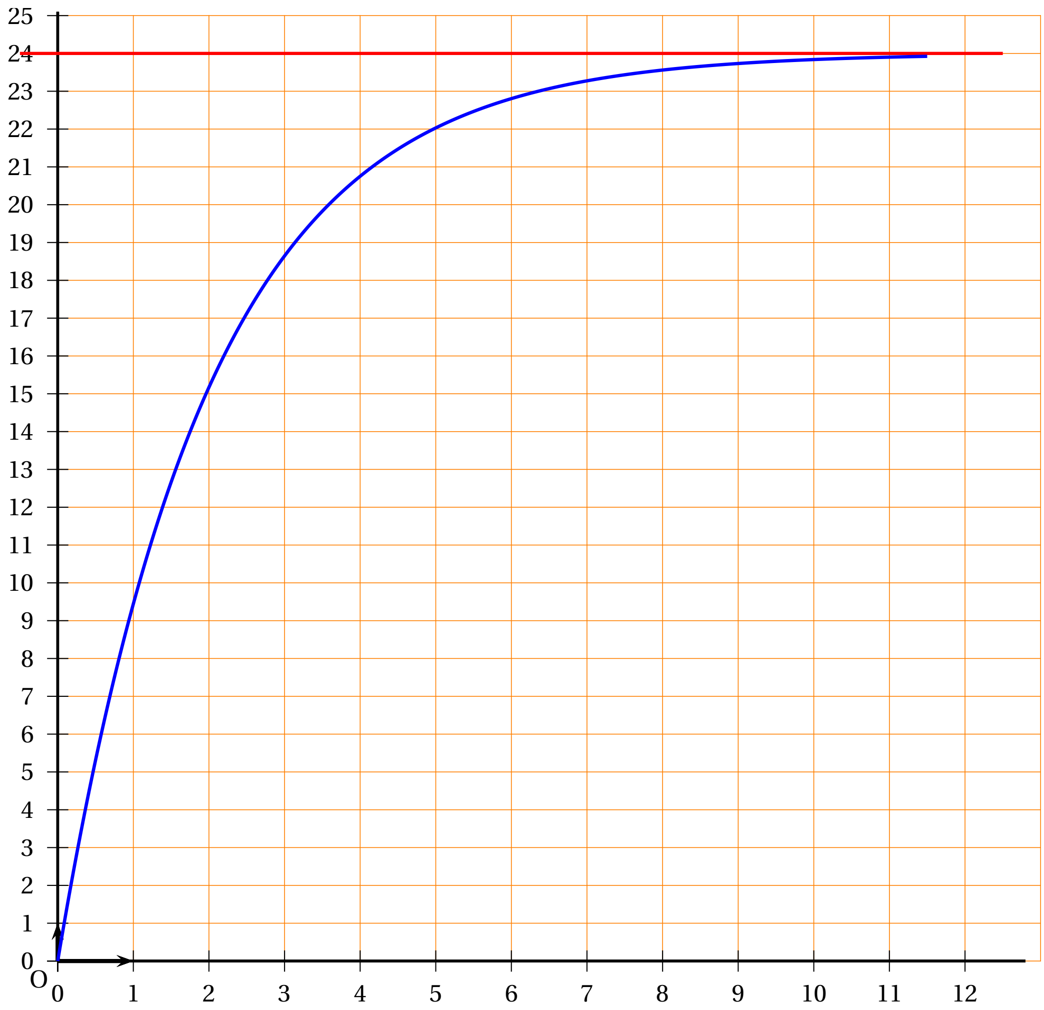
$f'(t) > 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.

3. Déterminons la limite en $+\infty$ de f ;

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 24\left(1 - \mathrm{e}^{-0,5t}\right) = 24$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$.

Sa courbe représentative admet la droite d'équation $y = 24$ comme asymptote.

4. La courbe représentative de cette fonction est tracée ci-dessous



EXERCICE 3 **5 points**

La courbe (C) tracée à l'annexe 2 est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note f' la fonction dérivée de f.
On constate sur la représentation graphique que :

- La tangente (T) à la courbe (C) au point A(0 ; 3) passe par le point I(1 ; 5).
- La droite (D) d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

1. En utilisant les données précédentes et le graphique :

a. $f(0) = 3$ car les coordonnées de A sont $(0; 3)$; $f'(0) = 2$. C'est le coefficient directeur de la droite (AI).

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ car la droite (D) d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

2. On note (S) l'aire de la partie du plan située entre la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. L'aire (S)du domaine définie précédemment, en unités d'aire est comprise entre 3 et 4.

3. On admet que la fonction f est définie, pour tout nombre réel x par : $f(x) = (4x+2)\mathrm{e}^{-x} + 1$.

a. $f'(x) = 4\mathrm{e}^{-x} + (4x+2)(-1\mathrm{e}^{-x}) + 0 = e^{-x}(4-(4x+2))$ par conséquent nous obtenons bien : pour tout nombre réel x : $\quad f'(x) = (2-4x)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudions le signe de f'. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \text{e}^x > 0$ par conséquent le signe de $f'(x)$ est celui de $2-4x$.

Sur $\mathbb{R}$, $2-4x > 0 \iff x < \dfrac{1}{2}$. Il en résulte

Pour tout $x \in \left]-\infty\;;\;\dfrac{1}{2}\right[$, $f'(x) > 0$ et pour tout $x \in \left]\dfrac{1}{2}\;;\;+\infty\right[$, $f'(x) < 0$.

Déterminons le sens de variation de f.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

$f'(x) > 0$ sur $\left]-\infty\;;\;\dfrac{1}{2}\right[$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.

$f'(x) < 0$ sur $\left]\dfrac{1}{2}\;;\;+\infty\right[$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$4\text{e}^{-0,5}+1$	$\searrow$	1

4. Soit F la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (-4x-6)\text{e}^{-x} + x$.

a. Montrons que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Pour ce faire, montrons que pour tout x, $F'(x) = f(x)$.

$F'(x) = -4\text{e}^{-x} + (-4x-6)(-\text{e}^{-x}) + 1 = \text{e}^{-x}(-4+4x+6) + 1 = (4x+2)\text{e}^{-x} + 1 = f(x)$.

Par conséquent F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminons la valeur exacte, puis la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de l'aire (S), en unités d'aire.

Pour $x \in [0\;;\;1]$, $f(x) > 0$. L'aire du domaine plan défini précédemment est en unités d'aire $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x$.

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x = \Big[F(x)\Big]_0^1 = F(1) - F(0) = (-4-6)\text{e}^{-1} + 1 - (-6) = 7 - 10\text{e}^{-1} \approx 3,32$

L'aire (S) vaut approximativement 3,32 unités d'aire.

c. Ce résultat est cohérent avec l'encadrement obtenu à la question 2 car il est bien compris entre 3 et 4.

EXERCICE 4 — 6 points

Une agence de voyages propose, dans un de ses circuits très fréquenté, une excursion sous forme d'option supplémentaire.

Le responsable de l'agence fait l'hypothèse que la proportion de clients prenant l'option est 0,25.

On choisit au hasard un échantillon de 60 clients. Tous les clients ont la même chance d'être choisis.
On considère que le nombre de clients de l'agence est suffisamment grand pour assimiler le choix de cet échantillon à un tirage successif avec remise de 60 clients.

Les trois parties A, B, C peuvent être traitées de façon indépendante

PARTIE A : loi binomiale

On appelle X la variable qui, à tout échantillon de 60 clients, associe le nombre des clients qui ont pris l'option supplémentaire.

1. La loi de probabilité de X est une loi binomiale car il s'agit d'une répétition de n séries indépendantes et identiques caractérisées par deux issues de probabilité p et q telles que $p+q=1$.
   Le nombre n de prélèvements est 60 et la probabilité que le client choisisse l'option supplémentaire est 0,25.
   Nous avons donc une loi binomiale de paramètres (60; 0,25) par conséquent $p(X=k)=\binom{60}{k}(0{,}25)^k(0{,}75)^{60-k}$.
   Les valeurs des probabilités $P(X=k)$ pour $k \geqslant 26$ et $0 \leqslant k \leqslant 5$ sont inférieures à 10^{-3} et elles seront considérées comme nulles.
   On a également tracé l'histogramme de la variable aléatoire X.
   a. L'aire correspondant à la probabilité $P(X \leqslant 21)$ a été hachurée sur l'histogramme de l'annexe 3 à rendre avec la copie .
   b. Déterminons une valeur approchée de $P(X \leqslant 21)$,
   $P(X \leqslant 21)=1-P(X>21)=1-(0{,}0144+0{,}0079+0{,}0041+0{,}002)=1-0{,}0284=0{,}9716$.
   $P(X \leqslant 21) \approx 0{,}97$
   Nous aurions pu utiliser la calculatrice pour déterminer directement $P(X \leqslant 21) \approx 0{,}9702$

PARTIE B : approximation par une loi normale

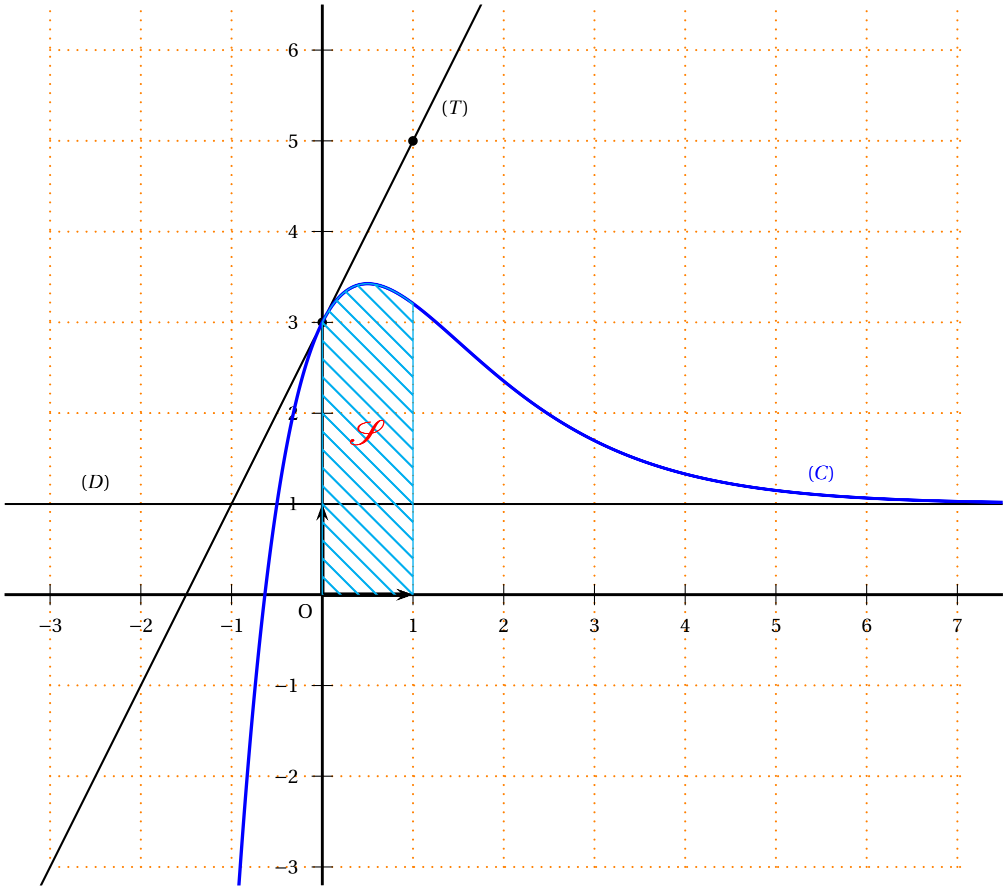
On suppose que les conditions permettant d'approximer une loi binomiale par une loi normale sont remplies.
On appelle Y une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne μ et d'écart type σ et approximant la loi binomiale $\mathscr{B}(60\ ;\ 0,25)$ (de paramètres $n=60$ et $p=0,25$).

1. Déterminons les paramètres μ et σ. X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(60;0{,}25)$. Les conditions d'approximation par la loi normale sont vérifiées et $\mu=np=60\times 0{,}25=15$, $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{60\times 0{,}25\times 0{,}75}=\sqrt{11{,}25}\approx 3{,}35$.
   Y suit la loi normale $\mathscr{N}(15,3{,}35)$.
2. On considère désormais que $\mu=15$ et $\sigma=3,35$.
   a. Déterminons, sans utiliser la calculatrice, $P(15 \leqslant Y \leqslant 18{,}35)$ (valeur arrondie à 10^{-3} près).
   Nous savons que si X suit une loi normale de paramètre (μ ; σ) alors $P(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma)=0{,}6826$.
   Or $P(15 \leqslant Y \leqslant 18{,}35)=P(\mu \leqslant Y \leqslant \mu+\sigma)$ par conséquent, par symétrie par rapport à l'axe $Y=15$,
   $P(15 \leqslant Y \leqslant 18{,}35)=\dfrac{1}{2}\times 0{,}6826=0{,}3913$.
   b. Montrons que $P(15 \leqslant Y \leqslant 25{,}05)$ a pour valeur approchée 0,498 5.
   Nous savons que si X suit une loi normale de paramètre (μ ; σ) alors $P(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma)=0{,}997$.
   Or $P(15 \leqslant Y \leqslant 25{,}05)=P(\mu \leqslant Y \leqslant \mu+3\sigma$ par conséquent, $P(15 \leqslant Y \leqslant 25{,}05)=\dfrac{1}{2}\times 0{,}997=0{,}4985$.
   c. Sachant que $P(21 \leqslant Y \leqslant 25{,}05)$ a pour valeur approchée 0,035 29,
   $P(Y \leqslant 21)=1-P(21 \leqslant Y \leqslant 25{,}05)=1-0{,}3529=0{,}9647$.
   d. Le résultat précédent est cohérent avec le résultat de la question A 2.b) car ils sont égaux à 10^{-2} près.

PARTIE C : prise de décision

1. Déterminons un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des clients ayant pris l'option dans un échantillon de 60 clients. On note J cet intervalle.
   Si $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$, $n(1-p) \geqslant 5$ nous pouvons approximer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 par l'intervalle :
   $$\left[p-1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p+1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$
   Nous avons $n=60$, $np=60\times 0{,}25=15$, $60\times(1-0{,}25)=11{,}25$. Les conditions étant remplies, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 est
   $$\left[0{,}25-1{,}96\sqrt{\frac{0{,}25\times 0{,}75}{60}}\ ;\ 0{,}25+1{,}96\sqrt{\frac{0{,}25\times 0{,}75}{60}}\right]\approx[0{,}14\ ;\ 0{,}36].$$
   Les bornes de l'intervalle sont arrondies à 10^{-2} près.
2. Pour vérifier l'hypothèse que la proportion de clients prenant l'option est 0,25, au niveau de confiance 95 %, l'adjoint du responsable de l'agence choisit au hasard un échantillon de 60 clients. Il observe alors qu'un tiers des clients a pris cette option.
   En utilisant l'intervalle J précédent, l'adjoint du responsable de l'agence décide de rejeter l'hypothèse, au niveau de confiance 95 %.
   La proportion de clients prenant l'option dans l'échantillon appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %, donc il ne doit pas rejeter l'hypothèse.

ANNEXE 2
(EXERCICE 3)
Cette annexe n'est pas à rendre



ANNEXE 3 À RENDRE AVEC LA COPIE
(EXERCICE 4)

Histogramme de la loi binomiale $\mathscr{B}(60\ ;\ 0,25)$ (de paramètres $n = 60$ et $p = 0,25$)

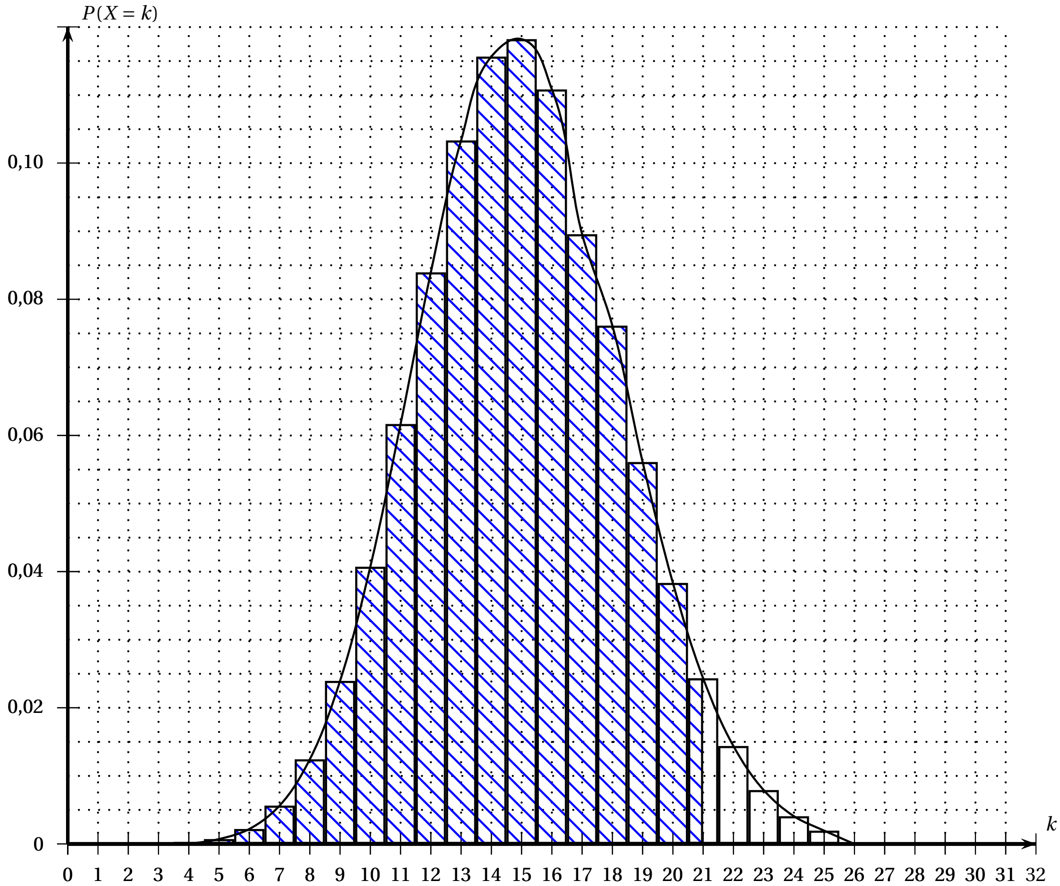


Table des valeurs de la loi binomiale $\mathscr{B}(60\ ;\ 0,25)$ pour $6 \leqslant k \leqslant 25$
(sauf la valeur pour $k = 10$)

k	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$P(X = k)$	0,002 2	0,005 6	0,012 4	0,024 0	...	0,061 7	0,084 0	0,103 4	0,115 7	0,118 2

k	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$P(X = k)$	0,110 8	0,095 6	0,076 1	0,056 1	0,038 3	0,024 3	0,014 4	0,007 9	0,004 1	0,002 0