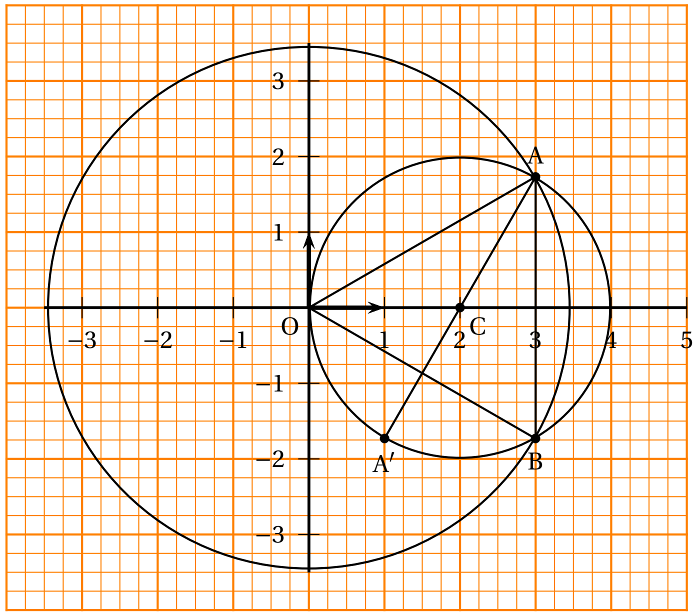
Corrigé du baccalauréat STL Métropole juin 2009
Chimie de laboratoire et de procédés industriels

EXERCICE 1 **5 points**

1. (E) peut s'écrire $y' + \frac{1}{2}y = 0 \iff y' = -\frac{1}{2}y$. On sait que les solutions sont de la forme : $y = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.
2. On a $f(0) = 2 \iff C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\times 0} = 2 \iff C = 2$. Donc : $f(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.
3. On a $M = \frac{1}{2-0}\int_0^2 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[-4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[-4\mathrm{e}^{-1} + 4\mathrm{e}^{0}\right] = 2\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) \approx 1{,}3$ à 0,1 près.
4. On sait depuis le départ que $f'(x) = -\frac{1}{2}f(x) = -\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} < 0$, car $\mathrm{e}^{x} > 0$ quel que soit le réel x. La fonction f est donc décroissante ce qui élimine le graphique 3.
   D'autre part $f(1) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 1,21$: le bon graphique est le n° 2.

EXERCICE 2 **6 points**

1. On a $|z_{\mathrm{A}}|^2 = 3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 9 + 3 = 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow |z_{\mathrm{A}}| = 2\sqrt{3}$.
   Donc $z_{\mathrm{A}} = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$.
   Un argument de z_{A} est donc $\frac{\pi}{6}$.
   z_{B} étant le conjugué de z_{A} son module est le même : $2\sqrt{3}$ et un de ses arguments est $-\frac{\pi}{6}$.
   Enfin le module de z_{C} est égale à 2 et un de ses arguments vaut 0.
2. On a donc $z_{\mathrm{A}} = 2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $z_{\mathrm{B}} = 2\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
3. Voir à la fin.
4. On a donc $z_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}\left(z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{A'}}\right) \iff 2z_{\mathrm{C}} = z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{A'}} \iff z_{\mathrm{A'}} = 2z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}} =$
   $z_{\mathrm{A'}} = 4 - 3 - \mathrm{i}\sqrt{3} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.
5. Calculons $\mathrm{CA}^2 = |z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}}|^2 = \left|3 + \mathrm{i}\sqrt{3} - 2\right|^2 = \left|1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right|^2 = 1 + 3 = 4$;
   $\mathrm{CB}^2 = |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{C}}|^2 = \left|3 - \mathrm{i}\sqrt{3} - 2\right|^2 = \left|1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right|^2 = 1 + 3 = 4$:
   $\mathrm{CA'}^2 = \left|z_{\mathrm{A'}} - z_{\mathrm{C}}\right|^2 = \left|1 - \mathrm{i}\sqrt{3} - 2\right|^2 = \left|-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right|^2 = 1 + 3 = 4$;
   Enfin $\mathrm{CO}^2 = 2^2 = 4$.
   Conclusion : $\mathrm{CA}^2 = \mathrm{CB}^2 = \mathrm{CA'}^2 = \mathrm{CO}^2 = 4 = 2^2$, donc les points A, B, A′ et O appartiennent au cercle de centre C et de rayon 2.
6. Puisque C est équidistant de A, B et O il est le point commun aux trois médiatrices du triangles ABO.
   Or $\mathrm{AB}^2 = |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}|^2 = \left|3 - \mathrm{i}\sqrt{3} - \left(3 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\right|^2 = \left|-2\mathrm{i}\sqrt{3}\right|^2 = 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$.
   Donc $\mathrm{AB} = \mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 2\sqrt{3}$: le triangle OAB est équilatéral, donc les médiatrices sont aussi les médianes et en particulier la droite (AA′) est la médiane du triangle ABO.



PROBLÈME **9 points**

1. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. On peut écrire :
   $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{x} \times x + \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(x\mathrm{e}^{x} + 1\right)$.
   On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} + 1 = 1$ et comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, par produit de limites on a,
   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
3. **a.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

   b. $f'(x) = 0 \iff 1 - \mathrm{e}^{-x} = 0 \iff 1 = \mathrm{e}^{-x} \iff \ln 1 = -x$ (par croissance de la fonction ln) d'où finalement $x = 0$.
   La courbe $\mathscr{C}$ a donc un extremum en 0, le point de coordonnées $(0\,;\,1)$.

   c. On a $f'(x) > 0 \iff 1 - \mathrm{e}^{-x} \iff 1 > \mathrm{e}^{-x} \iff 0 > -x \iff x > 0$;
   De même $f'(x) < 0 \iff x < 0$;
   Enfin $f'(0) = 0$.

   d. De la question précédente on en déduit les variations de la fonction F :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4. **a.** On a $f(x) - x = \mathrm{e}^{-x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ entraîne que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$, ce qui montre que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

   b. Comme la différence $f(x) - x$ est égale à une exponentielle qui représente un nombre positif, on peut en déduire que la la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de son asymptote quel que soit le réel x.

c. Voir plus bas.

5. Calcul d'aire

a. Une primitive de f est la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - \mathrm{e}^{-x}$

b. La fonction f étant positive l'est en particulier sur l'intervalle $[0\,;\,2]$, donc l'aire de $\mathcal{S}$, exprimée en unités d'aire de la partie du plan est égale à l'intégrale :

$\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0) = \dfrac{2^2}{2} - \mathrm{e}^{-2} - \left(\dfrac{0^2}{2} - \mathrm{e}^{-0}\right) =$

$2 - \mathrm{e}^{-2} + 1 = 3 - \mathrm{e}^{-2}$. (u. a.)

On a $\mathcal{A} \approx 2,86$ (u. a.)

Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$ puis son arrondi à 10^{-2} près.

L'unité d'aire valant $2 \times 2 = 4$ cm^2, $\mathcal{A} = 4\left(3 - \mathrm{e}^{-2}\right) \approx 11,44$ cm^2.