∽ Baccalauréat STMG Nouvelle Calédonie 26 novembre 2019 ∾

Le candidat est invité à faire figurer toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 **5 points**

Une chaîne de salles de sport propose trois formules d'abonnement mensuel :

— Formule A : accès aux cours collectifs;

— Formule B : accès libre à la salle de musculation;

— Formule C : accès libre à la salle de musculation et aux cours collectifs.

Partie A :

On a observé que :

— 43 % des clients de cette chaîne sont des hommes;

— 13 % des hommes et 62 % des femmes ont choisi la formule A;

— 74 % des hommes et 20 % des femmes ont choisi la formule B;

Les autres ont choisi la formule C.

On choisit au hasard la fiche d'un client.
On considère les évènements suivants :

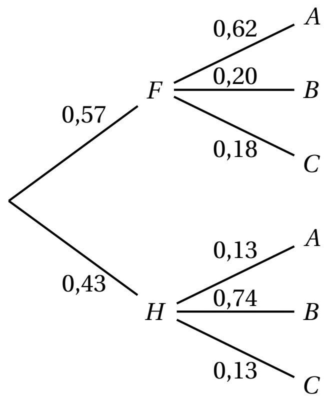
— F : « le client est une femme »;

— H : « le client est un homme »;

— A : « le client a choisi la formule A »;

— B : « le client a choisi la formule B »;

— C : « le client a choisi la formule C ».



1. L'arbre de probabilités a été complété ci-dessus :
2. **a.** L'évènement $H \cap A$ est l'évènement : « le client est un homme et a choisi la formule A ».

   b. Calculons la probabilité $p(H \cap A)$. $P(H \cap A) = P(H) \times P_H(A) = 0{,}43 \times 0{,}13 = 0{,}0559$
3. Montrons que $p(A) = 0{,}4093$.
   H et F forment une partition de l'univers.
   $P(A) = P(H) \times P_H(A) + P(F) \times P_F(A) = 0{,}0559 + 0{,}57 \times 0{,}62 = 0{,}4093$.
   La probabilité de A est bien 0,409 3.
4. Sachant que le client a choisi la formule A, la probabilité que ce soit un homme est notée $P_A(H)$. $P_A(H) = \dfrac{P(A \cap H)}{P(A)} = \dfrac{0{,}0559}{0{,}4093} \approx 0{,}1366$.
   La probabilité que ce soit un homme sachant qu'il a choisi la formule A est d'environ 0,136 6 à 10^{-4} près.

Partie B :

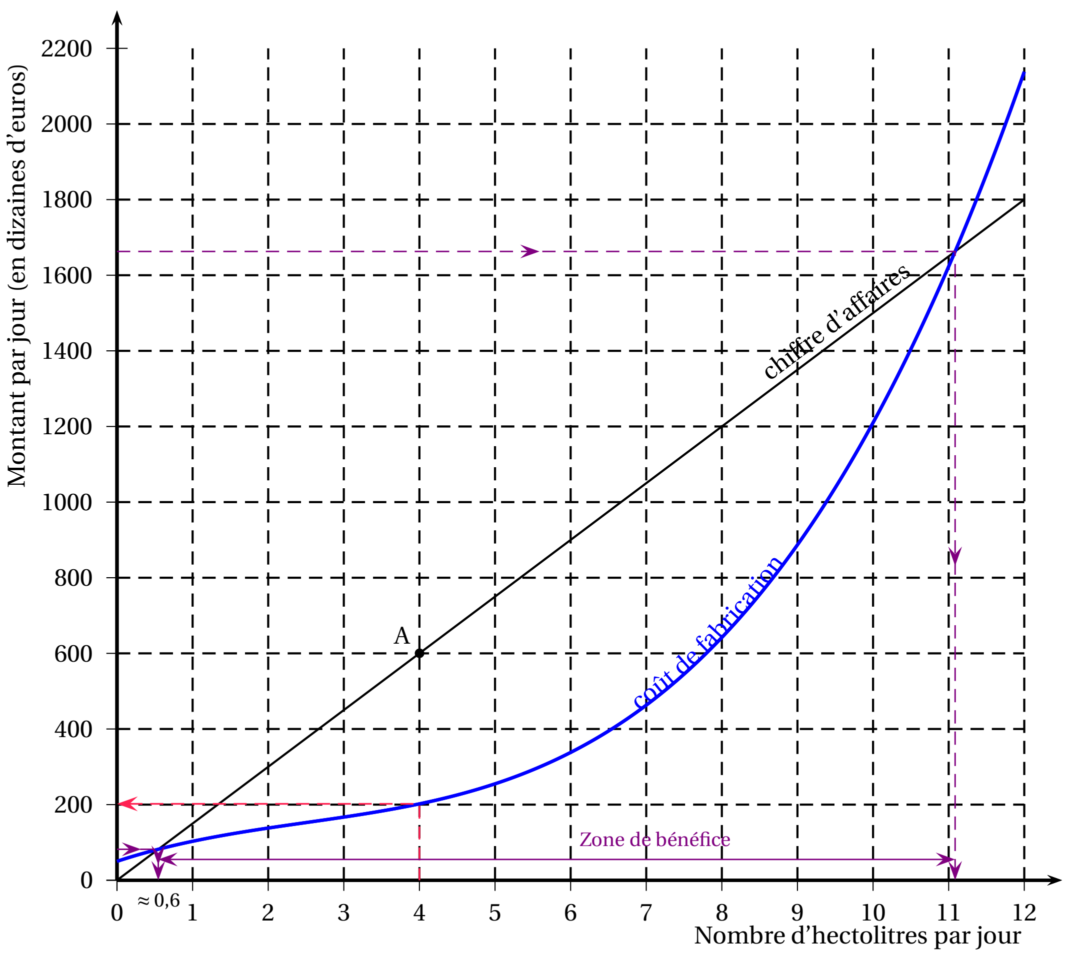
La direction de la chaîne de salles de sport estime que sur l'ensemble des salles, la proportion de clients abonnés depuis plus de 12 mois consécutifs est $p = 0{,}77$ [1].

1. En supposant que le texte « parmi un échantillon de 400 clients », s'inscrit ici au lieu d'être en répétition dans la question **2)**

1. Un intervalle de fluctuation, à au moins 95 %, de la fréquence des clients abonnés depuis plus de 12 mois est $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$. $I = \left[0,77 - \dfrac{1}{\sqrt{400}}\ ;\ 0,77 + \dfrac{1}{\sqrt{400}}\right] = [0,72\ ;\ 0,82]$
2. Dans une des salles de sport de la chaîne, la responsable a observé que, parmi les 400 clients, 280 sont restés abonnés depuis plus de 12 mois parmi un échantillon de 400 clients.
   a. La fréquence des clients abonnés depuis plus de 12 mois consécutifs dans cette salle est $\dfrac{280}{400} = 0,70$.
   b. La responsable peut penser que cette salle est moins attractive que les autres salles de la chaîne puisque 0,7 n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation à au moins 95 %.

EXERCICE 2 **6 points**

Une entreprise fabrique et vend un produit désinfectant liquide. Chaque jour, elle fabrique x hectolitres de désinfectant avec x compris entre 0 et 12. On considère que l'entreprise vend toute sa production.
Le coût de fabrication, en dizaine d'euros, de x hectolitres de ce produit est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 12]$.
Le chiffre d'affaires pour la vente de x hectolitres de produit est $R(x)$, exprimé en dizaines d'euros.
Dans un repère orthogonal du plan, on a tracé les représentations graphiques des fonctions C et R.



1. On considère la production d'une journée. Par lecture graphique :
   a. Le chiffre d'affaires réalisé pour la vente de 4 hectolitres est 6 000 €. Le point A appartenant à la droite a pour coordonnées (4 ; 600).

b. Le coût de fabrication de 4 hectolitres est d'environ 2 000. Nous lisons l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 4. Avec la précision du graphique, nous trouvons 200, ce qui correspond à 2 000 €.

c. Le bénéfice réalisé pour la vente de 4 hectolitres est d'environ 4 000 €.

d. Lors de la production et la vente de 4 hectolitres, l'entreprise ne réalise pas le bénéfice maximal. La distance entre un point de la courbe et le point de la droite de même abscisse semble supérieure lorsque $x = 7$.

2. Par lecture graphique, le nombre d'hectolitres que doit produire l'entreprise pour réaliser des profits, c'est-à-dire un bénéfice strictement positif devrait appartenir à l'intervalle $[0{,}6\,;\,11]$. Il y a un bénéfice strictement positif lorsque la droite des recettes est au-dessus de la courbe des coûts. Nous lisons les abscisses des points d'intersection des deux courbes et prenons l'intervalle entre ces valeurs.

3. La représentation graphique de la fonction R est une droite qui passe par l'origine du repère et par le point A de coordonnées (4 ; 600). Le coefficient directeur de cette droite est $\frac{600}{4}$ soit 150. Passant par l'origine, son équation est de la forme $y = mx$. D'où $R(x) = 150x$.

4. On note B la fonction qui modélise le bénéfice de l'entreprise en fonction du nombre d'hectolitres de désinfectant vendus. Pour x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,12]$, on a :

$$B(x) = -2x^3 + 15x^2 + 84x - 50.$$

a. On note B' la fonction dérivée de la fonction B.
$B'(x) = -2(3x^2) + 15(2x) + 84 = -6x^2 + 30x + 84$.

b. Résolvons l'équation $-6x^2 + 30x + 84 = 0$. Pour simplifier, commençons par mettre -6 en facteur, l'équation devient alors $x^2 - 5x - 14 = 0$.
Déterminons les racines de $x^2 - 5x - 14$. Calculons le discriminant
$\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-14) = 25 + 56 = 81 = 9^2$.
$\Delta > 0$, le trinôme a deux racines distinctes $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \dfrac{-(-5) - 9}{2} = -2 \quad x_2 = \dfrac{5 + 9}{2} = 7$.
L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - 5x - 14 = 0$ est $\{-2\,;\,7\}$.
Il en résulte $-6x^2 + 30x + 84 = -6(x^2 - 5x - 14) = -6\,(x + 2)\,(x - 7)$
Étudions le signe de $B'(x)$ sur $[0\,;\,12]$.
x étant positif le signe de $B'(x)$ est celui de $7 - x$.
Si $x \in [0\,;\,7[\quad 7 - x > 0$ par conséquent $B'(x) > 0$ et si $x \in]7\,;\,12]\quad 7 - x < 0$, par conséquent $B'(x) < 0$

c. Complétons le tableau de variations ci-dessous :
Justifions au préalable les variations de B.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
Sur $[0\,;\,7[$, $B'(x) > 0$ par conséquent B est strictement croissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
Sur $]7\,;\,12]$, $B'(x) < 0$ par conséquent B est strictement décroissante sur cet intervalle.

x	0		7		12
Signe de $B'(x)$		+	0	−	
Variations de B	50	$\nearrow$	587	$\searrow$	−338

d. Pour sept hectolitres de désinfectant produits et vendus le bénéfice est maximal. Le bénéfice est alors de 5 870 €.

EXERCICE 3 **5 points**

La fréquentation d'un parc animalier français depuis l'année 2010 est donnée dans la feuille de calcul ci-dessous, où le nombre de visiteurs est exprimé en milliers.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015
2	Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5
3	Nombre de visiteurs (en milliers) : y_i	530	600	1 002	910	912	1 099
4	Taux d'évolution annuel (en %)		13,2				

La ligne 4 de cette feuille de calcul contient les taux d'évolution entre deux années consécutives, arrondis à 0,1.
Par exemple, le taux d'évolution annuel du nombre de visiteurs entre 2010 et 2011 est de 13,2 %.

Partie A

1. Une formule que nous pouvons écrire dans la cellule C4, qui par recopie vers la droite permet de compléter la ligne 4 est : =(C$3-B$3)/B$3.
2. Vérifions que le taux d'évolution annuel moyen entre les années 2010 et 2015 est environ 15,7 %.

   En appelant t_m le taux moyen, le coefficient multiplicateur global est aussi $(1+t_m)^5$ puisque le nombre de visiteurs a subi 5 évolutions durant cette période.

   $(1+t_m)^5 = \dfrac{1099}{530} \approx 2{,}073585$ par conséquent $t_m = 2{,}073585^{\frac{1}{5}} - 1 \approx 0{,}157$.

   Le taux d'évolution moyen annuel du nombre de visiteurs entre 2010 et 2015, arrondi à 0,1 %, est égal à 15,7 %.

Partie B

Le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ est représenté dans le graphique en **annexe 1 à rendre avec la copie**.

1. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de ce nuage de points, obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = 105{,}40x + 578{,}67$, les coefficients étant arrondis à 0,01.
2. On décide d'ajuster le nuage de points par la droite D d'équation $y = 105x + 579$.
   a. La droite D est tracée sur le graphique donné en **annexe 1 à rendre avec la copie**.
   b. Selon ce modèle, déterminons le nombre de visiteurs que l'on peut prévoir en 2019.
   En 2019 $x = 9$. En remplaçant x par cette valeur dans l'équation de la droite, nous obtenons $y = 105 \times 9 + 579 = 1524$.
   Selon ce modèle, le nombre de visiteurs que l'on peut prévoir en 2019 est de 1 524 000 personnes.

Partie C

On suppose dans cette partie que le nombre de visiteurs dans le parc animalier augmente chaque année de 15,7 % à partir de 2015.
On note v_n le nombre de visiteurs, en milliers, en $2015+n$. Ainsi, $v_0 = 1099$.

1. À une augmentation de 15,7 % correspond un coefficient multiplicateur de 1,157.
   Le nombre de visiteurs en 2016 est v_1. Arrondi à l'unité $v_1 = 1099 \times 1{,}157 \approx 1272$. Le parc animalier a reçu en 2016 environ 1 272 milliers de visiteurs.
2. Chaque terme, sauf le premier se déduisant du précédent en le multipliant par le même nombre, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,157 et de premier terme 1 099.

3. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est : $u_n = u_0 \times (q)^n$. Le terme général de la suite (v_n) est : $v_n = 1\,099 \times (1{,}157)^n$.

4. On utilise l'algorithme ci-contre :
À la fin de l'exécution de l'algorithme, on admet que $N = 5$.
Ce résultat dans le contexte de l'exercice indique que dans 5 ans c'est-à-dire en 2020, le parc animalier recevra au moins deux millions de visiteurs.

$N \leftarrow 0$
$V \leftarrow 1\,099$
Tant que $V < 2\,000$
$\quad V \leftarrow V \times 1,157$
$\quad N \leftarrow N + 1$
Fin Tant que

EXERCICE 4 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples
Pour chaque question, une seule des trois affirmations proposées est correcte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question suivi de l'affirmation choisie.
Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse correcte rapporte un point, une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

1. Après une augmentation de 25 %, le prix d'un objet est 80 euros. Avant cette augmentation, l'objet valait :

   a. ~~60 euros~~ **b.** $\boxed{\text{64 euros}}$ **c.** ~~100 euros~~

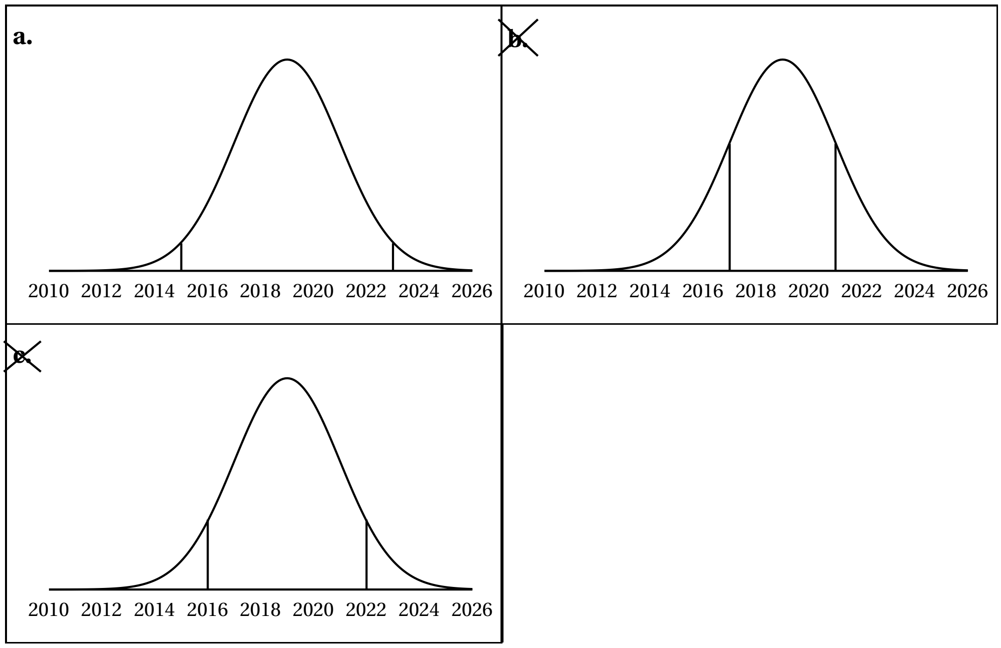
2. À l'ouverture d'une nouvelle salle de cinéma, on a relevé 1 360 entrées la première semaine, nombre pris comme indice de base 100. Trois semaines plus tard, la fréquentation est passée à 1 632 entrées. L'indice correspondant est :

   a. ~~20~~ **b.** ~~102~~ **c.** $\boxed{120}$

3. On considère X une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 2 019 et d'écart-type 2. La probabilité $p(X \geqslant 2\,021)$, arrondie à $0,01$, est égale à :

   a. $\boxed{0{,}16}$ **b.** ~~0,34~~ **c.** ~~0,84~~

4. On considère X une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 2 019 et d'écart-type 2.
On donne ci-dessous la courbe de densité de la variable aléatoire X.
Parmi les trois figures ci-dessous, celle pour laquelle la probabilité représentée est égale à $0,95$ est :



ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 1 – EXERCICE 3