Corrigé du baccalauréat S Antilles - Guyane septembre 2001

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

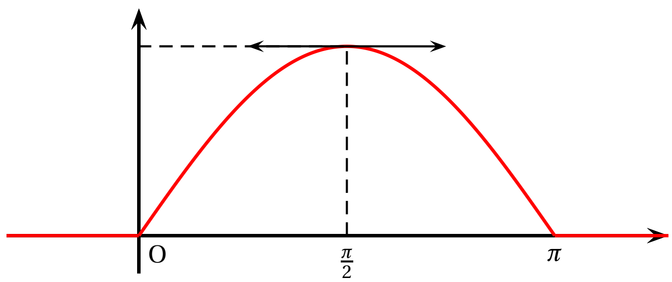
Soit m un nombre réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(x) & = & m\sin x & \text{pour } x \in [0\,;\,\pi] \\ f(x) & = & 0 & \text{sinon.}\end{array}\right.$$

1. f est une densité de probabilité si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \iff \int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \iff [-m\cos x]_0^{\pi} = 1 \iff$ $m + m = 1 \iff m = \dfrac{1}{2}$. f est alors une densité de probabilité.

2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin x$.

On a donc $f'(x) = \dfrac{1}{2}\cos x$ qui est positive sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ et négative sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$.



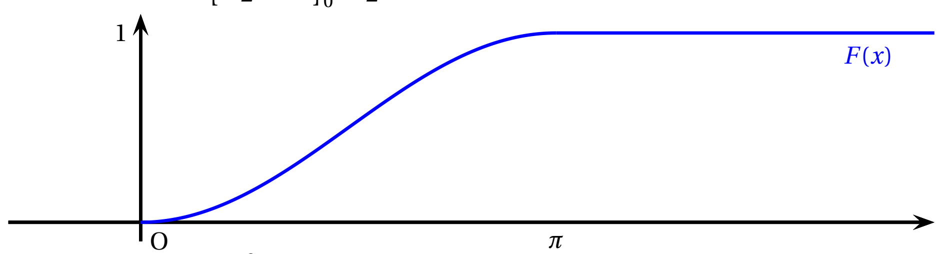
Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire X elle est définie :

• par $F(x) = 0$ sur $]-\infty\,;\,0]$;

• par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ sur $[0\,;\,\pi]$;

• par $F(x) = 1$ sur $]\pi\,;\,+\infty]$.

Sur $[0\,;\,\pi]$, on a $F(x) = \left[-\dfrac{1}{2}\cos t\right]_0^x = \dfrac{1}{2}(1-\cos x)$.



3.

4. On a $p\left(\dfrac{\pi}{4} \leqslant X \leqslant \dfrac{3\pi}{4}\right) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \dfrac{1}{2}\sin t$

$textdt = \dfrac{1}{2}[1-\cos t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \dfrac{1}{2}\left(-\cos\dfrac{3\pi}{4} + \cos\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707.$

5. • L'évènement $X \geqslant 0$ est l'évènement certain donc $p(X \geqslant 0) = 1$.

• L'évènement $X < 0$ est l'évènement contraire de l'évènement précédent donc $p(X < 0) = 0$ et $p(X = 0) = 0$, donc $p(X \leqslant 0) = 0$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1.

$$z^2+8z\sqrt{3}+64=0.$$

On a $\Delta=\left(8\sqrt{3}\right)^2-4\times 64=192-256=-64=(8\text{i})^2$: l'équation a donc deux racines complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{-8\sqrt{3}+8\text{i}}{2}=-4\sqrt{3}+4\text{i},\quad \text{et } z_2=-4\sqrt{3}-4\text{i}.$$

$$S=\left\{-4\sqrt{3}+4\text{i}\ ;\ -4\sqrt{3}-4\text{i}\right\}$$

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes

$$a=-4\sqrt{3}-4\text{i}\quad \text{et}\quad b=-4\sqrt{3}+4\text{i}.$$

On a $\text{OA}=|z_2|$; comme $|z_2|^2=48+16=64$, on a $\text{OA}=8$; de même $\text{OB}=8$.
$\text{AB}=|z_1-z_2|$.
Or $|z_1-z_2|^2=\left|-4\sqrt{3}+4\text{i}-\left(-4\sqrt{3}-4\text{i}\right)\right|^2=|8\text{i}|^2=64$, donc $\text{AB}=8$.
On a donc $\text{OA}=\text{OB}=\text{AB}=8$: le triangle OAB est équilatéral.

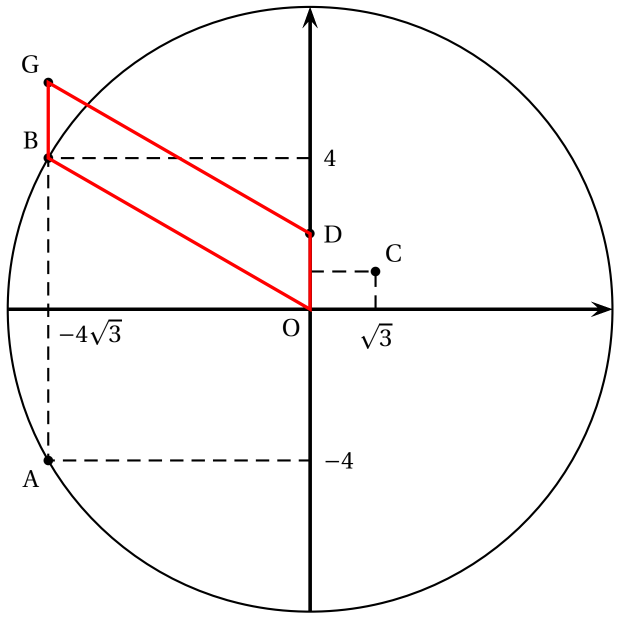
3. On obtient l'affixe de D en multipliant celle de C par le complexe $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+\text{i}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $d=\left(\sqrt{3}+\text{i}\right)\left(\frac{1}{2}+\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\text{i}\frac{3}{2}+\text{i}\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=2\text{i}.$

4. On appelle G le barycentre des points pondérés (O ; −1), (D ; 1) et (B ; 1).

a. On a par définition puisque G existe car $-1+1+1\neq 0$:
$-\overrightarrow{\text{GO}}+\overrightarrow{\text{GD}}+\overrightarrow{\text{GB}}=\vec{0}\iff -\overrightarrow{\text{GO}}+\overrightarrow{\text{GO}}+\overrightarrow{\text{OD}}+\overrightarrow{\text{GO}}+\overrightarrow{\text{OB}}=\vec{0}\iff +\overrightarrow{\text{OG}}=\overrightarrow{\text{OD}}+\overrightarrow{\text{OB}}.$
Puisque $\overrightarrow{\text{OB}}\begin{pmatrix}-4\sqrt{3}\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{OD}}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, on a donc $\overrightarrow{\text{OG}}\begin{pmatrix}-4\sqrt{3}\\6\end{pmatrix}$, soit $\text{G}\left(-4\sqrt{3}\ ;\ 6\right)$.

b.



c. On a $z_{\overrightarrow{\text{BG}}} = 6\text{i} - 4\sqrt{3} - \left(-4\sqrt{3} + 4\text{i}\right) = 2\text{i}$ et

$z_{\overrightarrow{\text{OD}}} = 2\text{i}$, donc $\overrightarrow{\text{OD}} = \overrightarrow{\text{BG}} \iff$ ODGB est un parallélogramme.

5. **a.** $\dfrac{c-g}{a-g} = \dfrac{\sqrt{3} + \text{i} - \left(-4\sqrt{3} + 6\text{i}\right)}{-4\sqrt{3} - 4\text{i} - \left(-4\sqrt{3} + 6\text{i}\right)} = \dfrac{5\sqrt{3} - 5\text{i}}{-10\text{i}} = \dfrac{\text{i} - \sqrt{3}}{2\text{i}} = \dfrac{-1 - \sqrt{3}\text{i}}{-2} = \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b. On a $\dfrac{c-g}{a-g} = \cos\dfrac{\pi}{3} + \text{i}\sin\dfrac{\pi}{3} = \text{e}^{\,\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

Donc $\overrightarrow{\text{GC}}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{\text{GA}}$ dans la rotation de centre G et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, donc $\left(\overrightarrow{\text{GA}},\ \overrightarrow{\text{GC}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ et la rotation conservant les longueurs, on a GC = GA.

Le triangle AGC est donc isocèle en G avec un angle de de mesure $\dfrac{\pi}{3}$, les deux autres angles ont la même mesure $\dfrac{\pi}{3}$; finalement le triangle AGC est équilatéral.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

1. Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que $\text{PGCD}(a+b\ ;\ ab) = p$, où p est un nombre premier.
   a. p divise $a+b$, donc divise aussi $a(a+b) = a^2 + ab$.
   p divisant a^2+ab et divisant ab, divise aussi leur différence $(a^2+ab) - ab = a^2$.
   b. Les diviseurs premiers de a^2 étant ceux de a, p divise donc a.
   On constate donc, de même, que p divise b.
   c. Soit α le $\text{PGCD}(a,\ b)$: p divisant a et b, divise α, il existe donc un naturel λ tel que $\alpha = \lambda p$.
   α étant le PGCD de a et de b il existe donc deux naturels a' et b' tels que $a = \alpha a'$ et $b = \alpha b'$.
   L'énoncé entraine $\left\{\begin{array}{lll} a+b & = & \alpha(a'+b') = \lambda p(a'+b') \\ ab & = & \alpha^2(ab) = \lambda^2 p^2(a'b') \end{array}\right.$
   Donc λp divise $a+b$ et ab donc est un diviseur du PGCD de a et b donc un diviseur de p : ceci n'est possible que si $\lambda p = 1$ ou encore $\lambda p = p$, soit $\lambda = 1$. Finalement le PGCD de a et b est p.
2. On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leqslant b$.
   a. Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{PGCD}(a,\ b) & = & 5 \\ \text{PPCM}(a,\ b) & = & 170 \end{array}\right.$$

   $\text{PGCD}(a,\ b) = 5$ signifie qu'il existe des entiers a' et b' premiers entre eux tels que $a = 5a'$ et $b = 5b'$.
   On sait que : $\text{PPCM}(a,\ b) = 170 = \text{PGCD}(a,\ b) \times a' \times b' = 5a'b' \iff$, d'où $a'b' = 34 = 1 \times 34 = 2 \times 17$.
   Avec la condition $a \leqslant b$, on obtient les solutions $a' = 1$ et $b' = 34$ ou $a' = 2$ et $b' = 17$.
   Les deux solutions sont donc les couples $(5\,;170)$ et $(10\,;85)$.
   b.

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{PGCD}(a+b,\ ab) & = & 5 \\ \text{PPCM}(a,\ b) & = & 170 \end{array}\right.$$

   On a vu à la question 1. que si $p = \text{PGCD}(a\,;\ b)$ avec p premier alors celui-ci est le PGCD de a et b. Donc les solutions du système sont des solutions du système précédent. Or les solutions trouvées à la question précédente vérifient le système, donc les solutions les mêmes que précédemment : $(5\,;170)$ et $(10\,;85)$.

PROBLÈME **11 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = -3 - \ln x + 2(\ln x)^2.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

Partie A - Étude de la fonction f et tracé de la courbe $(\mathscr{C})$

1. a. On pose $\ln x = X$. Il faut donc résoudre l'équation $-3 - X + 2X^2 = 0$

La solution -1 est évidente , donc l'autre solution est $\dfrac{3}{2}$.

On sait qu'alors $f(X) = 2(X+1)\left(X - \dfrac{3}{2}\right)$.

Il reste à résoudre : $\left\{\begin{array}{lcl} \ln x + 1 & = & 0 \\ \ln x - \dfrac{3}{2} & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \ln x & = & -1 \\ \ln x & = & \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \mathrm{e}^{-1} \\ x & = & \mathrm{e}^{\frac{3}{2}} \end{array}\right.$

$$S = \left\{\mathrm{e}^{-1}\ ;\ \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

b. D'après la question précédente on peut écrire :

$f(x) > 0 \iff 2(\ln x)^2 - \ln x - 3 > 0 \iff (\ln x + 1)(2\ln x - 3) > 0.$

On étudie le signe de chaque facteur :

• avec $x > 0$, $\ln x + 1 > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > \mathrm{e}^{-1}$;

• avec $x > 0$, $2\ln x - 3 > 0 \iff \ln x > \frac{3}{2} \iff x > \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$.

On en déduit le tableau des signes de f :

x	0		e^{-1}		$\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$\ln x + 1$	‖	$-$	0	$+$		$+$
$2\ln x - 3$	‖	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$

On en déduit donc $S = \left]0\ ;\ \mathrm{e}^{-1}\right[\cup \left]\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\ ;\ +\infty\right[$.

2. a. • On sait que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} -\ln x = +\infty$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\ln x)^2 = +\infty$, on a donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

• Pour $x \neq 0$, on peut écrire

$f(x) = (\ln x)^2\left[2 - \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{3}{(\ln x)^2}\right]$.

On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3}{(\ln x)^2} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[2 - \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{3}{(\ln x)^2}\right] = 2$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^2 = +\infty$ on en déduit par produit de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b. f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$, donc sur cet intervalle :

$f'(x) = 4\ln x \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{4\ln x - 1}{x}$.

c. Comme $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $4\ln x - 1$:

• $4\ln x - 1 = 0 \iff \ln x = \dfrac{1}{4} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}}$;

• $4\ln x - 1 > 0 \iff \ln x > \dfrac{1}{4} \iff x > \mathrm{e}^{\frac{1}{4}} \approx 1,284$;

• $4\ln x - 1 < 0 \iff \ln x < \dfrac{1}{4} \iff x < \mathrm{e}^{\frac{1}{4}}$.

Donc f est croissante sur $\left]0\ ;\ \mathrm{e}^{\frac{1}{4}}\right[$, puis décroissante sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}\ ;\ +\infty\right[$.

3. On a $M(x\ ;\ y) \in (\mathscr{T} \iff y - f\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\right) f'\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\right)\left(x - \mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\right)$.

On a $f\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\right) = 2 \times \left(\dfrac{5}{4}\right)^2 - \dfrac{5}{4} - 3 = \dfrac{25}{8} - \dfrac{5}{4} - 3 = \dfrac{25 - 10 - 24}{8} = -\dfrac{9}{8}$.

$f'\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\right) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}} = 4\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}$, donc :

$M(x\ ;\ y) \in (\mathscr{T} \iff y + \dfrac{9}{8} = 4\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}\left(x - \mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\right) \iff y = -\dfrac{9}{8} + 4\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}x - 4 \iff y = 4\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}x - \dfrac{41}{8}$.

4. On se propose d'étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{T})$.

Pour cela, on considère la fonction φ, définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - \left(4\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}x - \frac{41}{8}\right).$$

a. On a pour $x > 0$, $\varphi'(x) = f'(x) - 4\,\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}} = \dfrac{4\ln x - 1}{x} - 4\,\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}$;

$\varphi''(x) = \dfrac{\frac{4}{x} \times x - 4\ln x + 1}{x^2} = \dfrac{5 - 4\ln x}{x^2}$

b. On a donc car le signe de $\varphi''(x)$ est celui du numérateur :

- $5 - 4\ln x = 0 \iff \ln x = \dfrac{5}{4} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{5}{4}}$;
- $5 - 4\ln x > 0 \iff \ln x > \dfrac{5}{4} \iff x > \mathrm{e}^{\frac{5}{4}}$;
- $5 - 4\ln x < 0 \iff \ln x < \dfrac{5}{4} \iff x < \mathrm{e}^{\frac{5}{4}}$;

La fonction φ' est donc croissante sur $\left]0\,;\ \mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\right[$ et décroissante sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\,;\ +\infty\right[$.

Or $\varphi'\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\right) = \dfrac{4 \times \frac{5}{4} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}} - 4\,\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}} = 0$. Puisque le maximum de φ' est nul, on peut donc en conclure que $\varphi'(x) \leqslant 0$ sur $]0\,;\ +\infty[$.

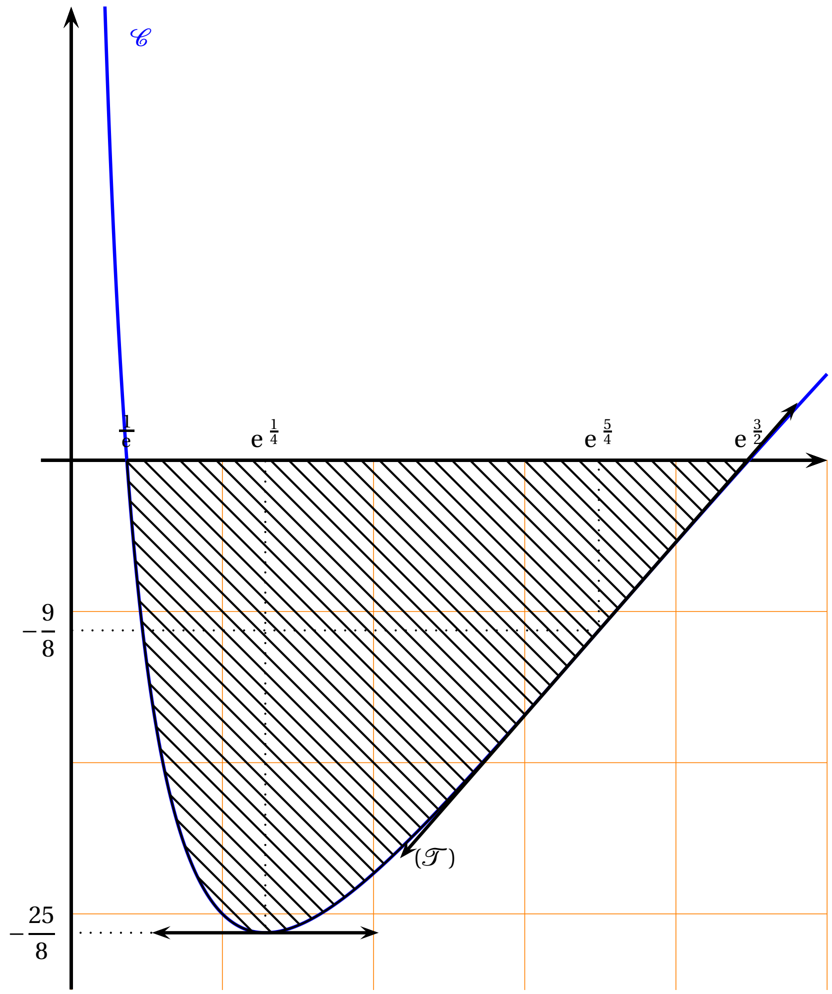
c. Puisque $\varphi'(x) \leqslant 0$, la fonction φ est donc décroissante sur $]0\,;\ +\infty[$.

$\varphi\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\right) = f\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\right) - \left(4\,\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}} \times \mathrm{e}^{\frac{5}{4}} - \dfrac{41}{8}\right) = -3 - \dfrac{5}{4} + 2\left(\dfrac{5}{4}\right)^2 - 4 + \dfrac{41}{8} = \dfrac{-24 + 10 + 25 - 32 + 41}{8} = 0.$

Conclusion φ est décroissante sur $]0\,;\ +\infty[$ et s'annule en $\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}$ et

- sur $\left]0\,;\ \mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\right[$, $\varphi(x) \geqslant 0$ ce qui signifie que la courbe $(\mathscr{C}$ est au dessus de $(\mathscr{T}$ et
- sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\,;\ +\infty\right[$, $\varphi(x) \leqslant 0$ ce qui signifie que la courbe $(\mathscr{C}$ est au dessous de $(\mathscr{T}$.

5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite $(\mathscr{T})$. (Unité graphique : 2 cm).



Partie B - Calcul d'une aire

1. La fonction h somme de fonctions dérivables sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
$h'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$: h est bien une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. **a.** D'après la question précédente : $I_1 = [x\ln x - x]_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} = e^{\frac{3}{2}} \times \ln e^{\frac{3}{2}} - e^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right) =$

$I_1 = \dfrac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} + \dfrac{2}{e}$

b. $\mathrm{I}_2 = \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} (\ln x \times \ln x)\,\mathrm{d}x$.

On intègre par parties toutes les fonctions étant continues car dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$:

$$\left\{\begin{array}{lclrcl} u(x) & = & \ln(x) & v'(x) & = & \ln(x) \\ u'(x) & = & \dfrac{1}{x} & v(x) & = & x\ln(x) - x \end{array}\right.$$

Donc $I_2 = \left[x(\ln(x))^2 - x\ln(x)\right]_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} - \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} [\ln(x) - 1]\,\mathrm{d}x =$

$\frac{9}{4}\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}} - [x\ln(x) - x - x]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}$
$= \frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} + 2\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{2}{\mathrm{e}} - \frac{2}{\mathrm{e}} = I_2 = \frac{5}{4}\,\mathrm{e}^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{\mathrm{e}}.$

c. $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} \left[-3 - \ln x + 2(\ln(x))^2\right]\mathrm{d}x = -3\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} 1\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} \ln x\,\mathrm{d}x + 2\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} (\ln(x))^2\,\mathrm{d}x =$
$-3\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) - \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{\mathrm{e}}\right) + 2\left(\frac{5}{4}\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{\mathrm{e}}\right) = -\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{\mathrm{e}}.$

On a vu dans l'étude de la fonction f que celle-ci est négative sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\ ;\ \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right]$, donc l'aire $\mathscr{A}$ de la surface limitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ est égale à l'opposée de l'intégrale principale, soit :

$\mathscr{A} = -\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{\mathrm{e}} \approx 7,8$ (u. a.). (ce que l'on peut vérifier approximativement sur la figure).