Corrigé du baccalauréat S Liban juin 2001

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

1. Chaque famille pouvant choisir un des cinq circuits, il y a $5 \times 5 = 25$ tirages possibles.
2. Sur ces 25 tirages il y a en 5 avec des termes identiques; la probabilité est donc égale à $\dfrac{5}{25} = \dfrac{1}{5} = 0,2$.
3. La probabilité de ne pas être sur le même circuit un jour donné est $1 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$. Donc la probabilité pour que pendant n jours consécutifs, elles ne se trouvent jamais sur le même circuit est égale à $\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.
4. Il faut résoudre l'inéquation :
$\left(\dfrac{4}{5}\right)^n \leqslant 0,1 \iff n\ln\left(\dfrac{4}{5}\right) \leqslant \ln 0,1 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0,1}{\ln\left(\dfrac{4}{5}\right)} \approx 10,3.$

   Il faut donc attendre au moins 11 jours.

Partie B

On a vu que $P(E) = \dfrac{1}{5}$.
Le second jour chaque famille a le même choix parmi les 4 circuits non encore faits; il y a 16 possibilités de choix et 4 cas favorables, donc $P(F/E) = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4} = 0,25$.
$P\left(F/\overline{\mathrm{E}}\right)$: il y a toujours 16 possibilités.
Si une famille choisit l'un des trois circuits restants, la seconde n'a plus de choix : elle doit choisir le dernier : il y a $3 \times 1 = 3$ cas favorables : $P\left(F/\overline{\mathrm{E}}\right) = \dfrac{3}{16}$.
On a $P(E \cap F) = P(E) \times P(F/E) = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{20}$.
$P\left(F \cap \overline{E}\right)$: on a vu que $P\left(F/\overline{E}\right) = \dfrac{3}{16}$, donc $P\left(F \cap \overline{E}\right) = P\left(\overline{E}\right) \times P\left(F/\overline{E}\right) = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{3}{16} = \dfrac{3}{20}$.
D'après la loi des probabilités totales :
$P(F) = P(E \cap F) + P\left(\overline{E} \cap F\right) = \dfrac{1}{20} + \dfrac{3}{20} = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5} = 0,2.$

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

1. $\dfrac{z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}}} = \dfrac{1+2\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}} = \dfrac{(1+2\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}{(3+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})} = \dfrac{3+2+6\mathrm{i}-2-\mathrm{i}}{9+1} = \dfrac{5+5\mathrm{i}}{10} = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}$.

Donc $\left|\dfrac{z_B}{z_A}\right|^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{4}$, d'où $\left|\dfrac{z_B}{z_A}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On peut donc écrire $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$.

2. De l'écriture trigonométrique de $\dfrac{z_B}{z_A}$, on déduit que $\arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Partie B

1. a. On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{\mathrm{N}}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$.

b. On sait que $\mathscr{A}(\mathrm{ABC}) = \dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{\mathrm{N}}\right\|$.

Or $\left\|\overrightarrow{\mathrm{N}}\right\|^2 = 1+4+4 = 9$, d'où $\left\|\overrightarrow{\mathrm{N}}\right\| = 3$ et $\mathscr{A}(\mathrm{ABC}) = \dfrac{3}{2}$.

2. On sait que $\overrightarrow{\mathrm{N}}$ normal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ est normal au plan (ABC), donc on a :

$M(x\ ;\ y\ ; z) \in (\mathrm{ABC}) \iff 1x + 2y - 2z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Par exemple $B(1\ ;\ 2\ ;\ 0) \in (\mathrm{ABC}) \iff 1 + 4 - 0 + d = 0 \iff d = -5$.

Conclusion : $M(x\ ;\ y\ ; z) \in (\mathrm{ABC}) \iff x + 2y - 2z - 5 = 0$

3. a. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ est normal au plan (ABC) donc colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{N}}$.

On pose $\overrightarrow{DH} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{N}}$.

Si $H(x\ ;\ y\ ;\ z)$ ses coordonnées vérifient l'équation du plan (ABC) ci-dessus et la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ et $\overrightarrow{N}$, donc avec

$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-d\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{N}}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \lambda \\ y & = & 2\lambda \\ z-d & = & -2\lambda. \end{array}\right.$$

En reportant ces coordonnées dans l'équation du plan :

$\lambda + 2\times 2\lambda + 4\lambda - 2d\lambda - 5 = 0 \iff 2d\lambda = 9\lambda - 5 \iff \lambda(9+2d) = 5 \iff \lambda = \dfrac{2d+5}{9}$.

b. De la relation de colinéarité on en déduit pour les normes que :

$\mathrm{DH}^2 = \lambda^2 \times \left\|\overrightarrow{\mathrm{N}}\right\|^2$ ou encore :

$\mathrm{DH}^2 = 9\lambda^2$, d'où $\mathrm{DH} = 3|\lambda| = 3\lambda$ car $d \geqslant 0$.

En prenant comme base du tétraèdre le triangle (ABC) et comme hauteur [DH], on obtient

$\mathrm{V}_d = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{2} \times 3\dfrac{2d+5}{9} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2d+5}{3} = \dfrac{2d+5}{6}$.

4. On a $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\2\\-d\end{pmatrix}$.

Donc (DB) est perpendiculaire au plan (ABC) si le vecteur $\overrightarrow{DB}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{N}}$ lui aussi normal au plan (ABC) donc si :

$$\left\{\begin{array}{lcl}1 &=& \alpha\\ 2 &=& 2\alpha\\ -d &=& \alpha\times(-2)\end{array}\right.$$

On obtient $\alpha = 1$, puis $d = 2$.

Avec D$(0\,;0\,;2)$, la droite (DB) est perpendiculaire au plan (ABC).

5. Si $d = 0$, alors $D = \mathrm{O}$ et le tétraèdre ci-dessus est le tétraèdre ABCO, dont le volume est égal à $\mathrm{V}_0 = \dfrac{5}{6}$.

En prenant comme base le triangle (OBC), on sait que l'aire de ce triangle est égale à $\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right\|$, soit avec

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{OC}}\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}$.

La norme de ce vecteur est égale à $\sqrt{1^2+2^2+(-4)^2} = \sqrt{21}$.

Si d' est la distance de A au plan OBC on a donc :

$\dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{3}\times\sqrt{21}\times d'$, d'où $d' = \dfrac{5}{2\sqrt{21}}$.

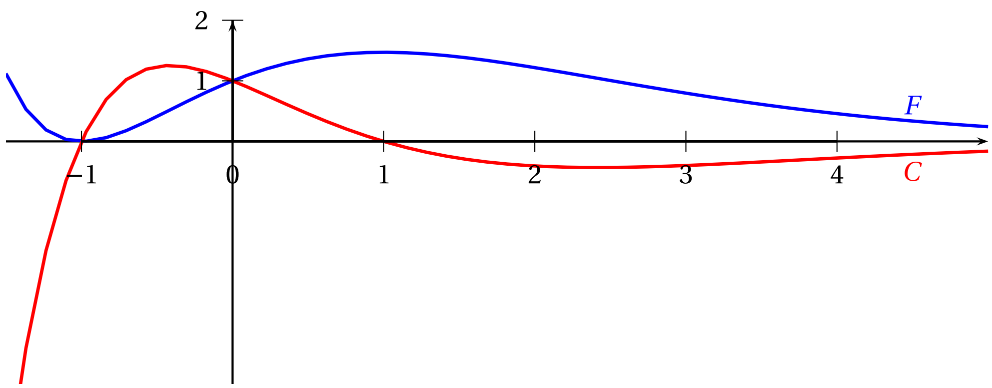
EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

À suivre...

PROBLÈME **5 points**

Partie A - Lectures graphiques



On donne dans un repère orthogonal les courbes C et F représentatives de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. On sait que l'une de ces fonctions est la fonction dérivée de l'autre, on peut donc les noter g et g'.

1. Sue la partie gauche on remarque que F est la représentation graphique d'une fonction décroissante sur $\left[-\dfrac{3}{2}\ ;\ 5\right]$ et que sur le même intervalle C est la représentation d'une fonction négative; il en est de même sur les intervalles $[-1\ ;\ 1]$, et $[1\ ;\ +\infty[$
Donc il semble que C est la représentation graphique de g et C celle de sa dérivée g'.
2. Quel est le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 0?
On peut donc dresser le tableau avec ses trois variations :

x	$-\frac{3}{2}$		-1		1		
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Partie B

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = 2(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. $f_0(x) = (x^2+2x)\mathrm{e}^{-x}$
f_0 est un produit de sommes de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$f_0'(x) = (2x+2)\,\mathrm{e}^{-x} - \left(x^2+2x\right)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(2x+2-x^2-2x\right) = \left(2-x^2\right)\mathrm{e}^{-x}$.
Donc $f_0(x) + f_0'(x) = \left(x^2+2x\right)\mathrm{e}^{-x} + \left(2-x^2\right)\mathrm{e}^{-x} = (2x+2)\,\mathrm{e}^{-x} = 2(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.
Donc $f_0(x) = (x^2+2x)\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de l'équation (E).
2. On sait que les solutions de l'équation sont les fonctions $x \longmapsto f(x) = C\mathrm{e}^{-x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.
3. On a donc $u'(x) + u(x) = 0$ et calculons :
$\left(f_0(x)+u(x)\right)' + f_0(x) + u(x) = f_0'(x) + u'(x) + f_0(x) + u(x) = f_0'(x) + f_0(x) = 2(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.
Donc la fonction définie par $\left(x^2+2x\right)\mathrm{e}^{-x} + C\mathrm{e}^{-x} = \left(x^2+2x+C\right)\mathrm{e}^{-x}$, avec $C \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle (E). On admettra que, réciproquement, toute solution f de (E) est de la forme
$f = f_0 + u$ où u est une solution de (E').
f est solution de $(E) \iff f(x) = \left(x^2+2x+C\right)\mathrm{e}^{-x}$.
4. On a donc $g(x) = \left(x^2+2x+C\right)\mathrm{e}^{-x}$ et par conséquent $g'(x) = 2(x+1)\,\mathrm{e}^{-x} - \left(x^2+2x+C\right)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(2x+2-x^2-2x-C\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(2-x^2-C\right)$.
Or on a vu que $g(-1) = g(1) = 0$, donc $g'(x) = 0 \iff 2-x^2-C = 0$ et comme 1 annule ce trinôme on a donc $2-1-C = 0 \iff C = 1$ et finalement :
$g(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(1-x^2\right)$.
5. On a donc $h(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(2-x^2-C\right)$ et par conséquent :
$h'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(2-x^2-C\right)$.
Or on veut que $h'(0) = 0 \iff \mathrm{e}^{-0}\left(2-0^2-C\right) = 0 \iff 2-C = 0 \iff C = 2$.
Donc h est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$h(x) = -x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.

Partie C

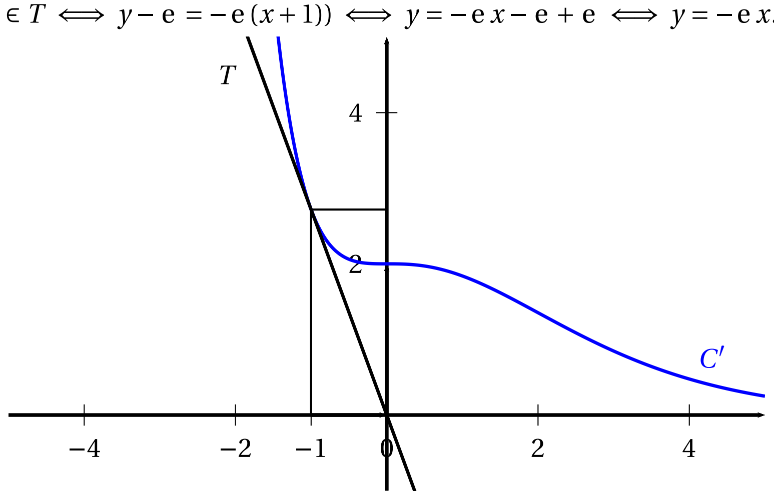
Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2+2x+2)\text{e}^{-x}$.

1. • Limite en plus l'infini : on a $f(x) = x^2\,\text{e}^{-x} + 2x\,\text{e}^{-x} + 2\,\text{e}^{-x}$.
Or on sait que $\lim x \to +\infty x^n\,\text{e}^{-x} : 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, donc par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
• Limite en moins l'infini
On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+2x+2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{e}^{-x} = +\infty$, donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2. f est l'une des fonctions solution de l'équation différentielle ci-dessus ; elle vérifie donc :
$f'(x) = 2(x+1)\,\text{e}^{-x} - (x^2+2x+2)\,\text{e}^{-x} = \text{e}^{-x}\left(2x+2-x^2-2x-2\right)\,\text{e}^{-x} = -x^2\,\text{e}^{-x}$.
Cette dérivée est clairement négative quel que soit le réel x. La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$ de plus l'infini à zéro..

3. Dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité graphique 2 cm, on note C' la représentation graphique de f.

a. Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C' au point Ω d'abscisse -1.
On a : $M(x\,;\,y) \in T \iff y - f(-1) = f'(-1)(x-(-1))$.
On a $f(-1) = (1-2+2)\,\text{e}^{1} = \text{e}$;
et $f'(-1) = -(-1)^2\,\text{e}^{-(-1)} = -\text{e}$.
$M(x\,;\,y) \in T \iff y - \text{e} = -\text{e}\,(x+1)) \iff y = -\text{e}\,x - \text{e} + \text{e} \iff y = -\text{e}\,x$.



b.

4. **a.** Déterminer trois réels a, b et c tels que la fonction F définie par $F(x) = (ax^2+bx+c)\text{e}^{-x}$ soit une primitive de la fonction f.
F est une primitive de f si sur $\mathbb{R}$, $F'(x) = f(x) \iff (2ax+b)\,\text{e}^{-x} - \left(ax^2+bx+1\right)\,\text{e}^{-x} = \left(x^2+2x+2\right)\,\text{e}^{-x} \iff \left(2ax+b-ax^2-bx-c\right)\,\text{e}^{-x} = \left(x^2+2x+2\right)\,\text{e}^{-x}$ et en simplifiant par e^{-x},
$2ax+b-ax^2-bx-c = x^2+2x+2 \iff -ax^2+(2a-b)x+b-c = x^2+2x+2$.
En identifiant terme à terme les coefficients de ces trinômes on obtient :

$a=-1$, puis $-2-b=2 \iff b=-4$ et $b-c=2 \iff -4-c=2 \iff c=-6$.
Conclusion : $F(x)=\left(-x^2-4x-6\right)\mathrm{e}^{-x}$.

b. On a vu que sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur l'intervalle $[0~;~\alpha]$, $f(x)\geqslant 0$, donc l'aire notée $\mathscr{A}(\alpha)$ de la zone du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C$'$ et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\alpha$ est égale à l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$, soit :
$\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x=[F(x)]_0^{\alpha}=F(\alpha)-F(0)=\left(-\alpha^2-4\alpha-6\right)\mathrm{e}^{-\alpha}-(-6)\,\mathrm{e}^{0}=6-\left(\alpha^2+4\alpha+2\right)\mathrm{e}^{-\alpha}$.