

∞ Sujet 0 – Spécialité mathématiques - Corrigé du sujet 2 ∞ Évaluation en fin de première

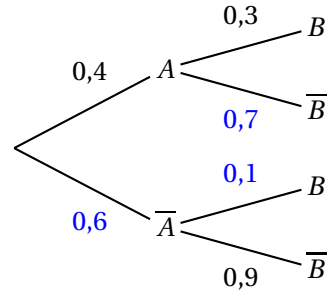
PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES - QCM (6 pts)

Question 1

On considère l'arbre de probabilité ci-contre.

On cherche la probabilité de l'évènement B .

On a



A.	B.	C.	D.
$p(B) = 0,18$	$p(B) = 0,12$	$p(B) = 0,66$	$p(B) = 0,3$

On a complété l'arbre de probabilités en bleu.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 p(B) &= p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B) \\
 &= 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,1 = 0,12 + 0,06 = 0,18
 \end{aligned}$$

Réponse A.

Question 2

Une tablette coûte 200 euros. Son prix diminue de 30 %.

Le prix après cette diminution est :

A.	B.	C.	D.
140 euros	170 euros	194 euros	197 euros

Diminuer de 30 %, c'est multiplier par $1 - \frac{30}{100}$ soit 0,7.

$$200 \times 0,7 = 140$$

Réponse A.

Question 3

Une réduction de 50 % suivi d'une augmentation de 50 % équivaut à :

A.	B.	C.	D.
une réduction de 50 %	une réduction de 25 %	une augmentation de 25 %	une augmentation de 75 %

Pratiquer une réduction de 50 %, c'est multiplier par $1 - \frac{50}{100} = 0,5$.

Augmenter de 50 %, c'est multiplier par $1 + \frac{50}{100} = 1,5$.

Réduire de 50 % puis augmenter de 50 %, c'est multiplier par $0,5 \times 1,5 = 0,75$.

$0,75 = 1 - \frac{25}{100}$ donc multiplier par 0,75 c'est effectuer une réduction de 25 %.

Réponse B.

Question 4

Dans un lycée, le quart des élèves sont internes, parmi eux, la moitié sont des filles.

La proportion des filles internes par rapport à l'ensemble des élèves du lycée est égale à :

A.	B.	C.	D.
4 %	12,5 %	25 %	50 %

$$\left| \text{La moitié du quart est } \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \text{ et } \frac{1}{8} = \frac{12,5}{100} \right.$$

Réponse B.**Question 5**

On considère le nombre $N = \frac{10^7}{5^2}$. On a :

A.	B.	C.	D.
$N = 2^5$	$N = 20\,000$	$N = \frac{1}{10^5}$	$N = 4 \times 10^5$

$$\left| N = \frac{10^7}{5^2} = \frac{10^2 \times 10^5}{5^2} = \frac{10^2}{5^2} \times 10^5 = \left(\frac{10}{5}\right)^2 \times 10^5 = 2^2 \times 10^5 = 4 \times 10^5 \right.$$

Réponse D.**Question 6**

Un appareil a besoin d'une énergie de $7,5 \times 10^6$ joules pour se mettre en route.

À combien de kiloWatts-heure (kWh) cela correspond-il ?

Données : 1 kWh = $3,6 \times 10^6$ J

A.	B.	C.	D.
0,5 kWh	2,08 kWh	5,3 kWh	20,35 kWh

$$\left| \begin{array}{l} 1 \text{ kWh} = 3,6 \times 10^6 \text{ J} \text{ donc } 2 \text{ kWh} = 7,2 \times 10^6 \text{ J} \\ \text{Donc } 7,5 \times 10^6 \text{ J} \text{ correspond à un peu plus de 2 kWh.} \end{array} \right.$$

Réponse B.**Question 7**

Le plan est muni d'un repère orthogonal. On note d la droite passant par les points A(0 ; -1) et B(2 ; 5).

Le coefficient directeur de la droite d est égal à :

A.	B.	C.	D.
$-\frac{1}{2}$	2	3	$\frac{1}{3}$

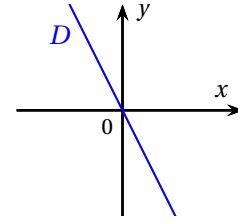
$$\left| \text{Le coefficient directeur de la droite } d \text{ est égal à } \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - (-1)}{2 - 0} = \frac{6}{2} = 3. \right.$$

Réponse C.

Question 8

On a représenté ci-contre une droite D .

Parmi les quatre équations ci-dessous, la seule susceptible de représenter la droite D est :



A. $2x - y = 0$	B. $2x + y + 1 = 0$	C. $y = x^2 - (x + 1)^2 + 1$	D. $y = 2x - 1$
---------------------------	-------------------------------	--	---------------------------

La droite a un coefficient directeur négatif et passe par l'origine.

- **A.** $2x - y = 0$ équivaut à $y = 2x$; on peut éliminer car le coefficient directeur est positif.
- **B.** $2x + y + 1 = 0$ équivaut à $y = -2x - 1$; on peut éliminer car la droite ne passe pas par l'origine.
- **D.** $y = 2x - 1$; on peut éliminer car la droite ne passe pas par l'origine.
- **C.** $y = x^2 - (x + 1)^2 + 1$ équivaut à $y = x^2 - (x^2 + 2x + 1) + 1$
équivaut à $y = x^2 - x^2 - 2x - 1 + 1$ soit $y = -2x$.

Réponse C.

Question 9

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = 10$ sur $\mathbb{R}$. On a :

A. $\mathcal{S} = \{-5; 5\}$	B. $\mathcal{S} = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$	C. $\mathcal{S} = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$	D. $\mathcal{S} = \emptyset$
--	--	--	--

| L'équation admet deux solutions $-\sqrt{10}$ et $\sqrt{10}$.

Réponse C.

Question 10

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x - 15)(x + 2)$ admet pour tableau de signes :

A.					
x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

B.					
x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

C.					
x	$-\infty$	-5	2	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

D.					
x	$-\infty$	-5	2	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$3x - 15$ s'annule et change de signe pour $x = 5$, et $x + 2$ s'annule et change de signe pour $x = -2$.

On établit le tableau de signes complet.

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$	
$3x-15$	$-$	$-$	0	$+$	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Réponse A.

Question 11

L'expression développée de $(2x + 0,5)^2$ est :

A. $4x^2 + x + 0,25$	B. $4x^2 + 4x + 2$	C. $4x^2 + 2x + 0,25$	D. $4x^2 + 2x + 1$
--------------------------------	------------------------------	---------------------------------	------------------------------

$$(2x + 0,5)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 0,5 + (0,5)^2 = 4x^2 + 2x + 0,25$$

Réponse C.**Question 12**

Lorsqu'un point mobile suit une trajectoire circulaire de rayon R , en mètre (m), son accélération centripète a (en m/s^2) s'exprime en fonction de la vitesse (en m/s) de la manière suivante : $a = \frac{v^2}{R}$.

L'expression permettant, à partir de cette formule, d'exprimer la vitesse v est :

A. $v = aR^2$	B. $v = \sqrt{aR}$	C. $v = \sqrt{\frac{a}{R}}$	D. $v = \frac{a^2}{R}$
-------------------------	------------------------------	---------------------------------------	----------------------------------

$$a = \frac{v^2}{R} \text{ équivaut à } aR = v^2 \text{ et donc } v = \sqrt{aR}.$$

Réponse B.**DEUXIÈME PARTIE (14 pts)****Exercice 1 (X points)**

En 2020, une ville comptait 10 000 habitants

On modélise l'évolution du nombre d'habitants de cette ville par la suite (u_n) définie ainsi :

$$\begin{cases} u_0 &= 10\,000 \\ u_{n+1} &= 1,08u_n - 300, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

où u_n représente le nombre d'habitants pour l'année $2020 + n$.

- u_1 représente le nombre d'habitants pour l'année $2020 + 1$ soit le nombre d'habitants en 2021.

$$u_1 = 1,08u_0 - 300 = 1,08 \times 10\,000 - 300 = 10\,800 - 300 = 10\,500$$

- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3\,750$.

- $v_0 = u_0 - 3\,750 = 10\,000 - 3\,750 = 6\,250$

- Pour tout entier naturel n , on a $v_n = u_n - 3\,750$ donc $u_n = v_n + 3\,750$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3\,750 = 1,08u_n - 300 - 3\,750 = 1,08(v_n + 3\,750) - 300 - 3\,750 \\ &= 1,08v_n + 4\,050 - 4\,050 = 1,08v_n \end{aligned}$$

- Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,08$ et de premier terme $v_0 = 6\,250$.

- On en déduit que, pour tout entier naturel n , on a $v_n = v_0 \times q^n = 6\,250 \times 1,08^n$.

- Pour tout n on a $v_n = 6\,250 \times 1,08^n$ et $u_n = v_n + 3\,750$ donc on peut en déduire que $u_n = 6\,250 \times 1,08^n + 3\,750$.

3.

Le tableau ci-contre, extrait d'une feuille automatisée de calcul, a été obtenu par recopie vers le bas après avoir saisi la formule suivante dans la cellule B2 :

$$= 6250 * 1,08^{A2} + 3750$$

La municipalité envisage d'ouvrir une nouvelle école maternelle dès que la population atteindra 19 000 habitants.

	A	B
1	n	Un
2	0	10 000
3	1	10 500
...	...	...
13	11	18 322,743 73
14	12	19 488,563 23
15	13	20 747,648 29
...	...	...

La population dépasse 19 000 habitants pour $n = 12$ soit en 2032.

La construction d'un tel établissement nécessite deux ans ; il faut donc commencer les travaux en 2030.

Exercice 2 (X points)

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Partie A

On considère la fonction P définie sur l'intervalle $[-5 ; 3]$ par : $P(x) = 2x^2 + x - 10$.

1. a. $P(x) = 2x^2 + x - 10$ est un polynôme du second degré.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times (-10) = 1 + 80 = 81 = 9^2$$

Les racines de P sont :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 9}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2} \text{ et } x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 9}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\text{b. } \frac{x' + x''}{2} = \frac{-\frac{5}{2} + 2}{2} = \frac{-\frac{5}{2} + \frac{4}{2}}{2} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$$

L'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = P(x)$ est donc la droite verticale d'équation $x = -\frac{1}{4}$.

2. Le polynôme P a pour racines $x' = -\frac{5}{2}$ et $x'' = 2$, donc

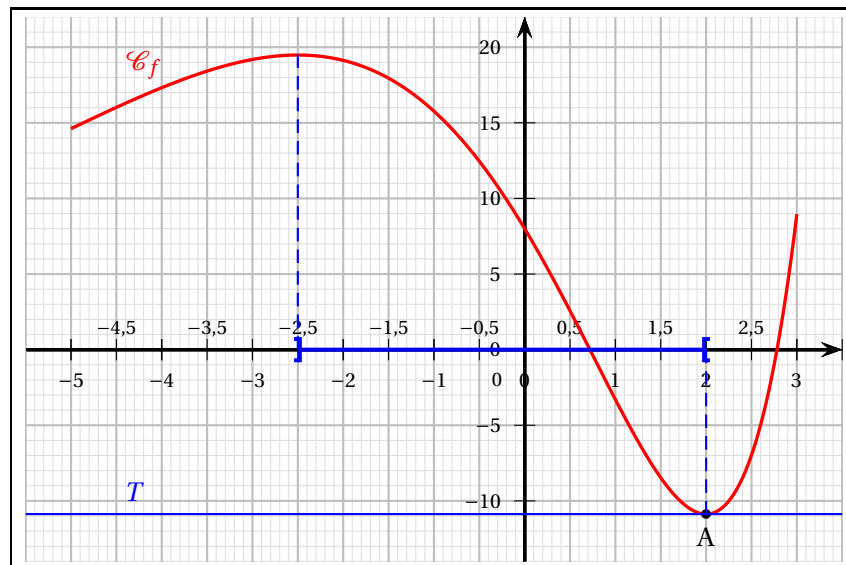
$$P(x) = a(x - x')(x - x'') = 2 \left(x - \left(-\frac{5}{2} \right) \right) (x - 2) = 2 \left(x + \frac{5}{2} \right) (x - 2)$$

On établit le tableau de signes de la fonction P sur l'intervalle $[-5 : 3]$.

x	-5	$-\frac{5}{2}$	2	3
$x + \frac{5}{2}$	-	0	+	+
$x - 2$	-	-	0	+
2	+	+	+	+
$P(x)$	+	0	-	0

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5 : 3]$ dont on donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.



La tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 2 est horizontale.

1. $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point de la courbe d'abscisse 2; c'est donc le coefficient directeur de la droite T . Or la droite T est horizontale, donc son coefficient directeur est égal à 0.

On en déduit que $f'(2) = 0$.

2. Les solutions de l'inéquation $f'(x) < 0$ sont les valeurs de x pour lesquelles la fonction f est strictement décroissante, soit l'intervalle $] -2,5 ; 2[$ d'après le graphique.
3. On sait que sur l'intervalle $[-5 ; 3]$: $f(x) = (4x^2 - 14x + 8) e^{0,5x}$.

D'après la formule de dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4 \times 2x - 14) \times e^{0,5x} + (4x^2 - 14x + 8) \times 0,5 e^{0,5x} \\ &= (8x - 14 + (4x^2 - 14x + 8) \times 0,5) e^{0,5x} \\ &= (8x - 14 + 2x^2 - 7x + 4) e^{0,5x} \\ &= (2x^2 + x - 10) e^{0,5x} \\ &= P(x) e^{0,5x} \end{aligned}$$

4. D'après la partie A, on connaît le signe de $P(x)$. De plus, on sait que $e^{0,5x} > 0$ pour tout réel x . On peut donc établir le tableau de signes de $f'(x)$, puis le tableau de variations de la fonction f .

x	-5	$-\frac{5}{2}$	2	3	
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$e^{0,5x}$	$+$		$+$		$+$
$f'(x) = P(x)e^{0,5x}$	$+$	0	$-$	0	$+$
variations de f	