Corrigé du Baccalauréat Polynésie

Sujet 1 – 5 septembre 2024

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1 — 5 points

Une concession automobile vend deux sortes de véhicules :

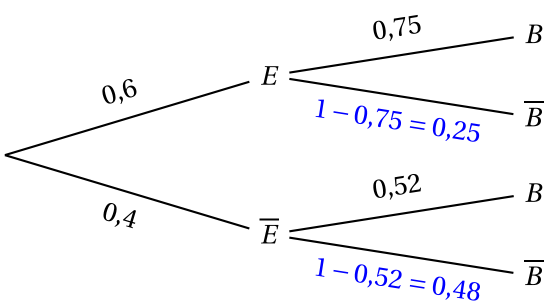
- 60 % sont des véhicules tout-électrique ;
- 40 % sont des véhicules hybrides rechargeables.

75 % des acheteurs de véhicules tout-électrique et 52 % des acheteurs de véhicules hybrides ont la possibilité matérielle d'installer une borne de recharge à domicile.

On choisit un acheteur au hasard et on considère les évènements suivants :

- E : « l'acheteur choisit un véhicule tout-électrique » ;
- B : « l'acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile ».

On crée un arbre pondéré résumant la situation.



1. La probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile est :
   $P(E\cap B) = P(E)\times P_E(B) = 0{,}6\times 0{,}75 = 0{,}45$.
2. D'après la formule des probabilités totales :
   $P(B) = P(E\cap B) + P\left(\overline{E}\cap B\right) = 0{,}45 + 0{,}4\times 0{,}52 = 0{,}658$.
3. Un acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile.

   La probabilité qu'il choisisse un véhicule tout-électrique est :
   $P_B(E) = \dfrac{P(E\cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}45}{0{,}658} \approx 0{,}684$.
4. On choisit un échantillon de 20 acheteurs. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile parmi l'échantillon de 20 acheteurs.

a. On est dans le cas d'une répétition avec remise d'une expérience n'ayant que 2 issues : la possibilité d'installer une borne de recharge, avec la probabilité $p = 0{,}658$, ou non. Donc la variable aléatoire X qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}658$.

b. $P(X = 8) = \binom{20}{8} \times 0{,}658^8 \times (1 - 0{,}658)^{20-8} \approx 0{,}011$

c. La probabilité qu'au moins 10 acheteurs puissent installer une borne de recharge est : $P(X \geqslant 10) = 1 - P(X \leqslant 9) \approx 1 - 0{,}045\,2 \approx 0{,}955$

d. L'espérance de X est : $E(X) = np = 20 \times 0{,}658 = 13{,}16$.

e. La directrice de la concession décide d'offrir l'installation de la borne de recharge aux acheteurs ayant la possibilité d'en installer une à leur domicile. Cette installation coûte 1 200 €.

L'espérance de X représente le nombre moyen de clients pouvant installer une borne de recharge à leur domicile. L'installation d'une borne coûte 1 200 €.

Il faut donc prévoir : $13{,}16 \times 1\,200$ soit 15 792 €.

Exercice 2 — 6 points

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + x$.

Affirmation A : La fonction f admet pour tableau de variations le tableau ci- dessous :

x	$-\infty$		$+\infty$
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $f'(x) = \mathrm{e}^x + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Affirmation A vraie

Affirmation B : L'équation $f(x) = -2$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et va de $-\infty$ à $+\infty$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

Affirmation B fausse

2. **Affirmation C** : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$.

   Pour $x \neq 0$, on a : $\dfrac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = \dfrac{x^2\left(\frac{\ln(x)}{x^2} - 1 + \frac{2}{x^2}\right)}{3x^2} = -\dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x^2} - \dfrac{2}{x^2}\right)$

   - $\dfrac{\ln(x)}{x^2} = \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{1}{x}$

     On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$; donc par produit : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$.
   - On sait aussi que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = 0$.

   On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\ln(x)}{x^2} - \frac{2}{x^2}\right) = 1$ et donc que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$.

Affirmation C vraie

3. On considère la fonction k définie et continue sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 1 + 2\,\mathrm{e}^{-x^2+1}$.

   Affirmation D : Il existe une primitive de la fonction k décroissante sur $\mathbb{R}$.

   Toute primitive K de la fonction k a pour dérivée k. Or, pour tout réel X, on a $\mathrm{e}^X > 0$. Donc pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^{-x^2+1} > 0$, donc $1 + 2\,\mathrm{e}^{-x^2+1} > 0$, et donc $k(x) > 0$.

   La primitive K a donc une dérivée toujours strictement positive, donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Affirmation D fausse

4. On considère l'équation différentielle (E) : $3y' + y = 1$.

   Affirmation E : La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1$ est solution de l'équation différentielle (E) avec $g(0) = 5$.

   - $g(x) = 4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1$ donc $g(0) = 4\,\mathrm{e}^0 + 1 = 4 + 1 = 5$
   - g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 4 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} = -\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$.

     Donc $3g'(x) + g(x) = 3 \times \left(-\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}\right) + \left(4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1\right) = -4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1 = 1$

     Donc la fonction g est solution de l'équation différentielle (E).

Affirmation E vraie

5. **Affirmation F** : Une intégration par parties permet d'obtenir : $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}$.

   En prenant : $\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & x \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^{-x}\end{array}\right.$, on a : $\left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & 1 \\ v(x) & = & -\mathrm{e}^{-x}\end{array}\right.$

   Cela donne par intégration par parties :

   $$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = -\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} + 1 = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}.$$

Affirmation F vraie

Exercice 3 4 points

On considère une pyramide à base carrée formée de boules identiques empilées les unes sur les autres :

- le 1$^{\text{er}}$ étage, situé au niveau le plus haut, est composé de 1 boule ;
- le 2$^{\text{e}}$ étage, niveau juste en dessous, est composé de 4 boules ;
- le 3$^{\text{e}}$ étage possède 9 boules ;
- …
- le n-ième étage possède n^2 boules.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre de boules qui composent le n-ième étage en partant du haut de la pyramide. Ainsi, $u_n = n^2$.

1. Le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages est :
$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$.

2. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

a. $S_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = \left(u_1 + u_2 + u_3 + u_4\right) + u_5 30 + 5^2 = 55$

Le nombre total de boules d'une pyramide de 5 étages est : $S_5 = 55$.

b. On complète la fonction `pyramide` ci-dessous de sorte que, pour tout entier naturel non nul n, l'instruction `pyramide(n)` renvoie le nombre de boules composant une pyramide de n étages.

```
def pyramide(n) :
    S = 0
    for i in range(1, n+1) :
        S = S + i**2
    return S
```

c. Pour tout entier naturel n :

- $$\begin{aligned}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= \frac{(n+1)(2n^2+n)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}\\ &= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{8}\\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6} &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$

d. On démontre par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$: $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- **Initialisation**

  Pour $n = 1$, on a $S_1 = 1$ et $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = \dfrac{1\times 2\times 3}{6} = 1$

  Donc la propriété est vraie au rang 1.
- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie au rang n, avec $n \geqslant 1$, c'est-à-dire $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
  C'est l'hypothèse de récurrence.

  $$\begin{aligned} S_{n+1} &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} = \big(u_1 + u_2 + \cdots + u_n\big) + u_{n+1} \\ &= S_n + (n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \dfrac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6} \text{ (d'après la question précédente)} \\ &= \dfrac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} \end{aligned}$$

  Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 1, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$.
  Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc démontré par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$: $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Un marchand souhaite disposer des oranges en pyramide à base carrée. Il possède 200 oranges.

   Il faut donc trouver le plus grand entier n tel que $S_n \leqslant 200$.

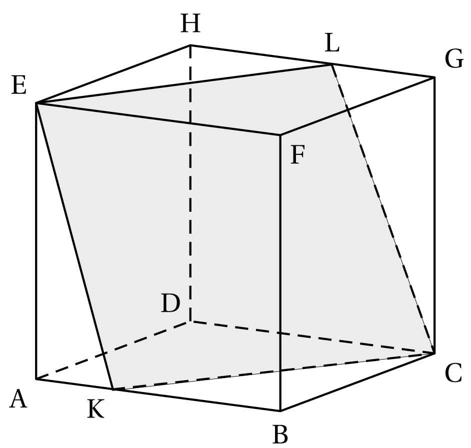
   On calcule : $S(7) = \dfrac{7(7+1)(2\times 7+1)}{6} = 140 < 200$ et $S(8) = \dfrac{8(8+1)(2\times 8+1)}{6} = 204 > 200$.

   Le marchand utilise donc 140 oranges pour construire une pyramide à 7 étages.

Exercice 4 — 5 points

On considère un cube ABCDEFGH et l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.
Pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0;\,1]$, on considère les points K et L de coordonnées :

$$K\,(m\,;\,0\,;\,0) \quad \text{et} \quad L\,(1-m\,;\,1\,;\,1).$$



1. Le point E a pour coordonnées $(0;0;1)$.

   Comme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, le point C a pour coordonnées $(1;1;0)$.
2. Dans cette question, $m = 0$. Ainsi, le point L $(1;1;1)$ est confondu avec le point G, le point K$(0;0;0)$ est confondu avec le point A et le plan (LEK) est donc le plan (GEA).

a. • ABCD est un carré donc ses diagonales sont perpendiculaires, donc $\overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{AC}$.

- Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est normal au plan (ABD) donc $\overrightarrow{AE}$ est orthogonal à tout vecteur du plan (ABD), donc $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{DB}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Le vecteur $\overrightarrow{DB}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (GEA) donc le vecteur $\overrightarrow{DB}$ est normal au plan (GEA).

b. On déduit de la question précédente que le plan (GEA) a une équation de la forme $1 \times x + (-1) \times y + 0 \times z + d = 0$, soit $x - y + d = 0$.

Le plan (GEA) passe par le point A de coordonnées $(0\,;0\,;0)$ donc $0-0+d = 0$ et donc $d = 0$.

Le plan (GEA) a donc pour équation $x - y = 0$.

On s'intéresse désormais à la nature de CKEL en fonction du paramètre m.

3. Dans cette question, m est un réel quelconque de l'intervalle $[0\,;1]$.

a. • $K\begin{pmatrix}m\\0\\0\end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0-m\\0-0\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-m\\0\\1\end{pmatrix}$.

- $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $L\begin{pmatrix}1-m\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CL}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-m-1\\1-1\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-m\\0\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{CL}$ donc CKEL est un parallélogramme.

b. $K\begin{pmatrix}m\\0\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-m\\1-0\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-m\\1\\0\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = x_{\overrightarrow{KC}} \times x_{\overrightarrow{KE}} + y_{\overrightarrow{KC}} \times y_{\overrightarrow{KE}} + z_{\overrightarrow{KC}} \times z_{\overrightarrow{KE}} = (1-m)\times(-m)+1\times0+0\times(-1) = m(m-1)$

c. CKEL est un rectangle si, et seulement si, CKEL possède un angle droit
si, et seulement si, $\overrightarrow{KC} \perp \overrightarrow{KE}$
si, et seulement si, $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = 0$
si, et seulement si, $m(m-1) = 0$
si, et seulement si, $m = 0$ ou $m = 1$

4. Dans cette question, $m = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, L a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,1\,;\,1\right)$ et K a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,0\,;\,0\right)$.

a. • $K\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$ et $L\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KL}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\1-0\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

- $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{EC} = 0 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$ donc $\overrightarrow{KL} \perp \overrightarrow{EC}$

Le parallélogramme CKEL a ses diagonales perpendiculaires donc c'est un losange.

b. • $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = m(m-1)$; or $m = \dfrac{1}{2}$ donc $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - 1\right) = -\dfrac{1}{4}$

- $\overrightarrow{\text{KC}} \cdot \overrightarrow{\text{KE}} = \text{KC} \times \text{KE} \times \cos\left(\widehat{\text{CKE}}\right)$
- $\overrightarrow{\text{KC}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

  Donc $\text{KC}^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 0^2 = \dfrac{5}{4}$ donc $\text{KC} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$
- $\overrightarrow{\text{KE}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -m \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  Donc $\text{KE}^2 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2 = \dfrac{5}{4}$ donc $\text{KE} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

On a donc : $-\dfrac{1}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \times \dfrac{\sqrt{5}}{2} \times \cos\left(\widehat{\text{CKE}}\right)$

Donc $-\dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4} \times \cos\left(\widehat{\text{CKE}}\right)$ et donc $\cos\left(\widehat{\text{CKE}}\right) = -\dfrac{1}{5}$

On en déduit avec la calculatrice que $\widehat{\text{CKE}} \approx 101{,}5°$, soit $\widehat{\text{CKE}} \approx 102°$.