∽ Corrigé du Baccalauréat Polynésie 17 juin 2025 ∾

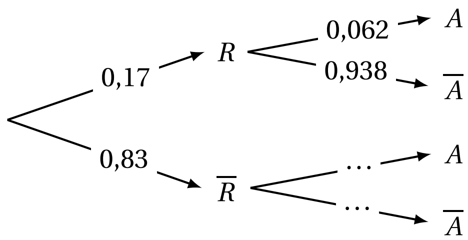
Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1 — 5 points

Partie A.

1. Un arbre de probabilité représentant la situation est :



2. **a.** $P(R \cap A) = P(R) \times P_R(A) = 0{,}17 \times 0{,}062 = 0{,}010\,54$
La probabilité que l'enfant interrogé habite en zone rurale et soit atteint d'allergie alimentaire vaut 0,010 54.
b. Les évènements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(A) = P\left(R \cap A\right) + P\left(\overline{R} \cap A\right)$
On a donc : $0{,}09 = 0{,}01054 + P\left(\overline{R} \cap A\right)$
D'où $P\left(\overline{R} \cap A\right) = 0{,}09 - 0{,}010\,54 = 0{,}079\,46$
La probabilité que l'enfant interrogé habite en zone urbaine et soit atteint d'allergie alimentaire vaut 0,079 46.
c. $P_{\overline{R}}(A) = \dfrac{P\left(\overline{R} \cap A\right)}{P\left(\overline{R}\right)} = \dfrac{0{,}079\,46}{0{,}83} = \dfrac{3\,973}{41\,500} \approx 0{,}095\,73.$
La probabilité qu'un enfant soit atteint d'allergie alimentaire sachant qu'il habite en zone urbaine vaut 0,095 7 arrondi à 10^{-4}.

Partie B.

1. On répète 100 fois de manière identique et indépendante une expérience aléatoire à deux issues dont le succès « L'enfant est atteint d'une allergie alimentaire » a une probabilité $p = 0{,}09$.
La variable aléatoire X compte le nombre de succès.
Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}09$.
2. À l'aide de la calculatrice : $P(X \geqslant 10) \approx 0{,}412\,49$
La probabilité qu'au moins 10 enfants parmi les 100 interrogés soient atteints d'allergie alimentaire vaut 0,412 5 arrondi à 10^{-4}.

Partie C.

1. Dans le contexte de l'exercice, la variable aléatoire M_{20} représente l'âge moyen d'apparition des premiers symptômes pour les 20 enfants.

2. M_{20} est la moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire A telle que $E(A) = 4$ et $V(A) = 2{,}25$ d'où :

$E\left(M_{20}\right) = E(A) = 4$

$V\left(M_{20}\right) = \dfrac{V(A)}{20} = \dfrac{2{,}25}{20} = 0{,}1125$

3. L'évènement « $2 < M_{20} < 6$ » revient à

$|M_{20} - 4| < 2$ et $P\Big(|M_{20} - 4| < 2\Big) = 1 - P\Big(|M_{20} - 4| \geqslant 2\Big)$.

Or, d'après l'inégalité de concentration, pour tout réel $t > 0$:

$P\Big(|M_n - E(A)| \geqslant t\Big) \leqslant \dfrac{V(A)}{nt^2}$.

Soit ici, avec $n = 20$ et $t = 2$: $P\Big(|M_{20} - 4| \geqslant 2\Big) \leqslant \dfrac{2{,}25}{20 \times 2^2}$,

d'où $P\Big(|M_{20} - 4|P\Big(|M_{20} - 4| < 2\Big) \geqslant 1 - \dfrac{2{,}25}{80} P\Big(|M_{20} - 4| < 2\Big) \quad \geqslant \dfrac{311}{320}$

Or $\dfrac{311}{320} \approx 0{,}9719$,

donc : $P(2 < M_{20} < 6) > 0{,}97$.

Dans le contexte de l'exercice cela signifie que dans plus de 97 % des cas, les premiers symptômes apparaissent entre 2 et 6 ans.

Exercice 2 5 points

1. Le sol est le plan P_0 d'équation $z = 0$ donc l'avion touchera le sol lorsque $z = 0$, c'est à dire $11 - 4t = 0$ soit $t = \dfrac{11}{4}$.

Les coordonnées du point S sont donc : $\begin{cases} x = -11 + 5 \times \dfrac{11}{4} = \dfrac{11}{4} \\ y = -5 + \dfrac{11}{4} = -\dfrac{9}{4} \\ z = 0 \end{cases}$

S'il ne dévie pas de sa trajectoire, les coordonnées du point S en lequel l'avion Bêta touchera le sol sont : $\left(\dfrac{11}{4} ; -\dfrac{9}{4} ; 0\right)$.

2. **a.** L'avion Alpha transmet à la tour sa position en A$(-7 ; 1 ; 7)$ et sa trajectoire est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de la droite d_{A} caractérisant la trajectoire de l'avion Alpha est donc : $\begin{cases} x = -7 + 2s \\ y = 1 - s \\ z = 7 - 3s \end{cases}$ où s décrit $\mathbb{R}$.

b. Les deux avions entreront en collision si leur deux trajectoires se coupent, c'est à dire si les droites d_{A} et d_{B} sont sécantes.

Cherchons s'il existe un couple $(t\ ;\ s)$ tel que le point de paramètre t sur d_{B} soit confondu avec le point de paramètre s sur d_{A}, pour cela, résolvons :

$$\begin{cases} -11+5t=-7+2s\\ -5+t=1-s\\ 11-4t=7-3s \end{cases} \iff \begin{cases} -11+5(6-s)=-7+2s\\ t=6-s\\ 11-4(6-s)=7-3s \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -11+30-5s=-7+2s\\ t=6-s\\ 11-24+4s=7-3s \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 26=7s\\ t=6-s\\ 7s=20 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s=\dfrac{26}{7}\\ t=6-s\\ s=\dfrac{20}{7} \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution, donc les deux avions ne peuvent pas rentrer en collision.

3. **a.** L'avion Alpha passe par la position E$(-3\ ;\ -1\ ;\ 1)$ s'il existe un réel s tel que le point de paramètre s sur d_{A} ait pour coordonnées $(-3\ ;\ -1\ ;\ 1)$, pour cela, résolvons :

$$\begin{cases} -3=-7+2s\\ -3=1-s\\ 1=7-3s \end{cases} \iff \begin{cases} 4=2s\\ -4=-s\\ -6=-3s \end{cases} \iff \begin{cases} s=2\\ s=2\\ s=2 \end{cases}$$

Le point E$(-3\ ;\ -1\ ;\ 1)$ correspond au point de paramètre $s=2$ donc l'avion Alpha passe par le point E.

b. Le plan P_{E} est perpendiculaire à la droite d_{A} dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$,

donc $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal au plan P_{E}.

Une équation cartésienne du plan P_{E} est donc de la forme : $2x-y-3z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.

De plus, le point E appartient au plan P_{E} donc les coordonnées du point E vérifient l'équation du plan P_{E}, d'où : $2x_{\text{E}}-y_{\text{E}}-3z_{\text{E}}+d=0$ soit $2\times(-3)-(-1)-3\times1+d=0$;

on a donc $-6+1-3+d=0 \iff d=8$

Conclusion : ine équation cartésienne du plan P_{E} est bien : $2x-y-3z+8=0$.

c. Déterminons les coordonnées du point F, intersection du plan P_{E} et de la droite d_{B}.

Les coordonnées des points d'intersection sont solutions du système

$$\begin{cases} x=-11+5t\\ y=-5+t\\ z=11-4t\\ 2x-y-3z+8=0 \end{cases}$$

On cherche donc t qui vérifie $2(-11+5t)-(-5+t)-3(11-4t)+8=0$ c'est-à-dire :

$-22+10t+5-t-33+12t+8=0 \iff 21t=42 \iff t=\dfrac{42}{21}=2.$

On en déduit $\begin{cases} x=-11+5t=-11+5\times 2=-1 \\ y=-5+t=-5+2=-3 \\ z=11-4t=11-4\times 2=11-8=3 \end{cases}$

Le point d'intersection du plan P_{E} et de la droite d_{B} est le point F$(-1\,;\,-3\,;\,3)$.

d. Le repère est orthonormé on peut donc utiliser les coordonnées pour calculer les distances.

$\text{EF}=\sqrt{(x_{\text{F}}-x_{\text{E}})^2+\left(y_{\text{F}}-y_{\text{E}}\right)^2+(z_{\text{F}}-z_{\text{E}})^2}$

$\text{EF}=\sqrt{(-1-(-3))^2+(-3-(-1))^2+(3-1)^2}$

$\text{EF}=\sqrt{(2)^2+(-2)^2+(2)^2}$

$\text{EF}=\sqrt{4+4+4}$

$\text{EF}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

d'où EF$\approx 3{,}464\,1$ km soit EF$\approx 3\,646$ m à 1 m près.

4. Si les avions Alpha et Bêta sont respectivement en E et F au même instant, la distance les séparant est de $3\,646$ m soit environ $\dfrac{3\,646}{1\,852}\approx 1{,}97$ mille nautique.

Or $1{,}97<3$ donc leur distance de sécurité n'est pas respectée.

Exercice 3 — 5 points

Partie A : Étude des fonctions f_n pour $n \geqslant 1$

1. **a.** On dérive un produit de deux fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$. Soit x un réel positif :

$$f_n'(x)=nx^{n-1}\times \text{e}^{-x}+x^n\times\left(-\text{e}^{-x}\right)=\left(nx^{n-1}-x^n\right)\text{e}^{-x}$$
$$=\left(n\times x^{n-1}-x\times x^{n-1}\right)\text{e}^{-x}=\left(n-x\right)x^{n-1}\,\text{e}^{-x}$$

b. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, donc $\forall x\in[0;+\infty[,\quad \text{e}^{-x}>0$;

Sur $[0\,;\,+\infty[$, x est donc positif, et donc x^{n-1} est positif aussi ;

Ainsi, $f_n'(x)$ est du signe du facteur $(n-x)$.

On a $\quad n-x>0 \iff n>x,\quad$ donc c'est pour cela que l'on a bien $f_n'(x)>0$ sur $[0\,;\,n[$, de façon immédiate, $f_n'(n)=0$ et, par élimination, $f_n'(x)<0$ sur $]n\,;\,+\infty[$.

Le signe de $f_n'(x)$ est donc justifié.

Par conséquent, on en déduit les variations de f_n : sur $[0\,;\,n]$, f_n' est à valeurs positives, ne s'annulant que de façon isolée (pour $x=n$), donc f_n est strictement croissante sur $[0\,;\,n]$.

Sur $[n\,;\,+\infty[$, f_n' est à valeurs négatives, ne s'annulant que de façon isolée (pour $x=n$), donc f_n est strictement décroissante sur $[n\,;\,+\infty[$.

On calcule les images de 0 et n par f_n :

- $f_n(0)=0^n\times\text{e}^{-0}=0\times 1=0$;

- $f_n(n) = n^n \times \text{e}^{-n} = n^n \times \dfrac{1}{\text{e}^n} = \left(\dfrac{n}{\text{e}}\right)^n$;

Enfin, calculons la limite de f_n quand x tend vers $+\infty$:

$\forall x \in]0\,;\,+\infty[, \quad f_n(x) = x^n\,\text{e}^{-x} = \dfrac{x^n}{\text{e}^x} = \dfrac{1}{\dfrac{\text{e}^x}{x^n}}$

La propriété des croissances comparées dit que, pour tout n naturel non nul : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\text{e}^x}{x^n} = +\infty$;

Par limite du quotient, on en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\dfrac{\text{e}^x}{x^n}} = 0.$

La courbe $\mathscr{C}_n$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

On a ainsi justifié tous les éléments de ce tableau de variations.

2. Pour n entier naturel non nul, on a : $f_n(1) = 1^n \times \text{e}^{-1} = 1 \times \text{e}^{-1} = \text{e}^{-1}$.
Cela confirme que la courbe $\mathscr{C}_n$ contient bien le point $\text{A}\left(1\,;\,\text{e}^{-1}\right)$.

Partie B : Étude des intégrales $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\text{d}x$ pour $n \geqslant 0$

1. a. La fonction f_0 est à valeurs positives sur $[0;1]$, donc I_0 correspond à l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par : la courbe $\mathscr{C}_0$, l'axe des abscisses, et les deux droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

b. De la même façon, chaque intégrale I_n est la surface délimitée par la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses, et les deux droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Graphiquement, on conjecture que chacune de ces surface est incluse dans celles correspondant à un entier n plus petit, donc les aires sont de plus en plus petites, et la suite (I_n) semble décroître, en étant minorée par 0, la suite serait convergente, vers une limite positive, proche de 0, ou vers 0, en effet, l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_{100}$ est déjà très faible.

2. On a :
$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \text{e}^{-x}\,\text{d}x = \Big[-\text{e}^{-x}\Big]_0^1 \\ &= \left(-\text{e}^{-1}\right) - \left(-\text{e}^{-0}\right) = -\text{e}^{-1} + \text{e}^0 \\ &= 1 - \text{e}^{-1} \end{aligned}$$

3. a. Soit n un entier naturel.
$$\begin{aligned} x \in [0\,;\,1] &\implies 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ &\implies 0 \times x^n \leqslant x \times x^n \leqslant 1 \times x^n, \quad \text{car } x^n \geqslant 0 \\ &\implies 0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n \end{aligned}$$
On arrive bien à l'inégalité demandée.

b. Soient n un entier naturel et x un réel de $[0\,;\,1]$. En multipliant l'inégalité précédente par e^{-x}, qui est un nombre réel supérieur à zéro, il vient :
$0 \leqslant x^{n+1}\,\text{e}^{-x} \leqslant x^n\,\text{e}^{-x}$ soit $0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$.

Comme on intègre entre 0 et 1, avec $0 < 1$, par positivité de l'intégrale, on en déduit :
$$\int_0^1 0\,\text{d}x \leqslant \int_0^1 f_{n+1}(x)\,\text{d}x \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,\text{d}x \quad \text{soit} \quad 0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$

4. D'après la question précédente, on a, pour tout entier naturel n, simultanément :

— $0 \leqslant I_n$, donc la suite (I_n) est minorée par 0 ;
— $I_{n+1} \leqslant I_n$, donc la suite (I_n) est décroissante ;

La suite étant décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente, vers une limite ℓ supérieure ou égale à 0.

5. Soit n un entier naturel n.

On pose : $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v(x) = -\,\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$

Toutes ces fonctions étant continues car dérivables sur $[0\,;\,1]$, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u(x) \times v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[u(x) \times v(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 u'(x) \times v(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{formule d'intégration par parties} \\ &= \Big[x^{n+1} \times \left(-\,\mathrm{e}^{-x}\right)\Big]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n \times \left(-\,\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(-1^{n+1} \times \mathrm{e}^{-1}\right) - \left(-0^{n+1} \times \mathrm{e}^{-0}\right) + (n+1)\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité} \\ &= (n+1)I_n - \frac{1}{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

On arrive bien à la relation de récurrence annoncée.

6. **a.** Supposons que la limite ℓ est supérieure à zéro.

Alors, par limite du produit, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)I_n = +\infty$

Puis par limite de la somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)I_n - \dfrac{1}{\mathrm{e}} = +\infty$.

Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} = +\infty$, autrement dit, la suite de terme général I_{n+1} **diverge** vers $+\infty$.

Or la suite de terme général I_{n+1} a la même limite que la suite de terme général I_n, qui elle **converge** vers un réel positif ℓ (dont on peut dire qu'il est inférieur à $I_0 = 1 - \mathrm{e}^{-1}$).

L'unicité de la limite est donc en contradiction avec ces résultats.

b. Dans la question précédente, on a fait une supposition non étayée : on a supposé $\ell > 0$. Cette supposition conduisant à une contradiction, cela démontre, par l'absurde que l'on a $\ell \leqslant 0$.

Comme on savait, depuis la question **4.**, que ℓ est un réel positif, on peut donc en déduire que l'on a : $\ell = 0$.

La suite (I_n) converge donc vers 0.

7. Ici, l'appel `mystère(100)` renvoie une liste (stockée dans la variable `L`) contenant les valeurs (approchées) des 101 premiers termes de la suite, de I_0 à I_{100}.

En effet, I est initialisée (ligne 2) à la valeur I_0, puis L est initialisée (ligne 3) en tant que liste contenant la valeur I_0.

Ensuite, on rentre dans un boucle à `n` = 100 répétitions (pour `i` allant de 0 à 99), et dans chaque exécution, la variable `I` est mise à jour (ligne 5) en utilisant la relation de récurrence de la suite (I_n), donc passe de la valeur d'un terme à la valeur du terme suivant dans la suite (I_n). Cette nouvelle valeur est ensuite ajoutée à la fin de la liste `L` (ligne 7).

En sortie de boucle, on a donc appliqué 100 fois la relation de récurrence, donc la variable `I` contient bien la valeur (approchée de) $I_{0+100} = I_{100}$, qui a été la dernière ajoutée à la liste `L`.

Remarque ⚠

> Si on fait effectivement tourner le script Python donné dans l'énoncé, les résultats sont manifestement faux à partir de $n = 18$ puisque les valeurs trouvées deviennent négatives !
> Les calculs se font avec une valeur approchée de e et les erreurs se cumulent assez rapidement.
> Les calculs effectués sur tableur ne donnent pas de meilleurs résultats.
> En revanche, si on calcule les aires sous la courbe avec GeoGebra, les résultats semblent corrects, et la suite des intégrales tend effectivement vers 0.

Exercice 4 — 5 points

1. **Affirmation 1 : Vraie.**

   On reconnaît une forme présente dans le cours : les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$, avec a et b réels non nuls ont pour solution les fonctions de la forme : $\quad x \longmapsto k\,\text{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$, $\quad$ où k est un réel quelconque.

   Ici, on applique cette propriété avec $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 4$, ce qui donne bien l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{2}y + 4$, ayant pour solution les fonction de la forme : $\quad x \longmapsto k\,\text{e}^{\frac{1}{2}x} - \dfrac{4}{\frac{1}{2}}$ soit $x \longmapsto k\,\text{e}^{\frac{1}{2}x} - 8$, avec $k \in \mathbb{R}$.

2. **Affirmation 2 : Vraie.**

   Une équipe de volley-ball telle que décrite est constituée d'un couple de deux éléments. Le premier élément de ce couple est un ensemble de 3 élèves filles distinctes (donc pas de répétition), qui n'ont pas de rôle particulier, donc on parle d'un ensemble, et pas d'une liste ou d'un triplet (donc pas de notion d'ordre) : on va utiliser des combinaisons.

   3 filles choisies parmi les 18 de la classe : il y a $\dbinom{18}{3} = 816$ façons de choisir les trois filles qui constitueront ce premier ensemble.

   Le deuxième élément du couple sera un ensemble de trois élèves garçons, choisis avec les même principes.

   3 garçons choisis parmi les 14 de la classe : il y a $\dbinom{14}{3} = 364$ façons de choisir les trois garçons qui constitueront ce second ensemble.

   Finalement, par principe multiplicatif, une équipe est un ensemble de trois filles choisi parmi les 816 ensembles possibles, associé à un ensemble de garçons parmi les 364 ensembles possibles : il y a donc $\quad 816 \times 364 = 297\,024$ équipes différentes possibles.

3. **Affirmation 3 : Vraie.**

   Pour tout n entier naturel, on a :

$$\begin{aligned} -1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1 &\implies 1 \leqslant 2+\cos(n) \leqslant 3 \\ &\implies \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2+\cos(n)} \leqslant \frac{1}{1} \quad \text{fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\implies \frac{n}{3} \leqslant \frac{n}{2+\cos(n)} \quad \text{car } n \geqslant 0 \\ &\implies \frac{n}{3} \leqslant v_n \end{aligned}$$

Par limite du quotient, on a immédiatement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3} = +\infty$,
donc, par comparaison, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, ce qui est l'affirmation 3.

4. **Affirmation 4 : Fausse.**
   On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, donc, comme le repère est orthonormé, on a :
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\times 1 + (-2)\times 0 + 6\times 1 = 10$, la première partie de l'affirmation est donc vraie.
   Cependant, on peut aussi calculer les normes et en déduire le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$, défini par les deux vecteurs.
   $AB = \sqrt{4^2+(-2)^2+6^2} = \sqrt{16+4+36} = \sqrt{56} = \sqrt{4\times 14} = 2\sqrt{14}$.
   $AC = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$.
   On a donc, avec la définition trigonométrique du produit scalaire :
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right) = 2\sqrt{14}\times\sqrt{2}\times\cos\left(\widehat{BAC}\right) = 4\sqrt{7}\cos\left(\widehat{BAC}\right)$
   En égalant ces deux expressions du produit scalaire, on déduit :
   $10 = 4\sqrt{7}\cos\left(\widehat{BAC}\right)$ qui équivaut à : $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{10}{4\sqrt{7}} = \dfrac{5\sqrt{7}}{14}$.
   Il se trouve que le cosinus de 30° est connu, il vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et est donc différent de celui trouvé ici : l'angle ne mesure dont pas 30°.
   Remarque : une valeur approchée d'une mesure de l'angle peut être obtenue à la calculatrice :
   $\widehat{BAC} = \arccos\left(\dfrac{5\sqrt{7}}{14}\right) \approx 19°$.

5. **Affirmation 5 : Vraie.**
   En effet, pour tout x réel strictement positif, on a : $h''(x) = x\ln(x) - 3x = x\big(\ln(x) - 3\big)$
   x étant strictement positif, le signe de $h''(x)$ est donc le signe de $\ln(x) - 3$.
   $$\begin{aligned} x \in \left[\mathrm{e}^3\,;\,+\infty\right[&\implies \mathrm{e}^3 \leqslant x \\ &\implies \ln\left(\mathrm{e}^3\right) \leqslant \ln(x) \quad \text{car ln est croissante sur } \mathbb{R}*+ \\ &\implies 3 \leqslant \ln(x) \\ &\implies 0 \leqslant \ln(x) - 3 \\ &\implies 0 \leqslant h''(x) \end{aligned}$$
   Sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^3\,;\,+\infty\right[$, la dérivée seconde de h est donc à valeurs positives, donc la dérivée première de h est croissante, et donc h elle-même est bien convexe sur cet intervalle.