Baccalauréat Centres étrangers 12 juin 2025

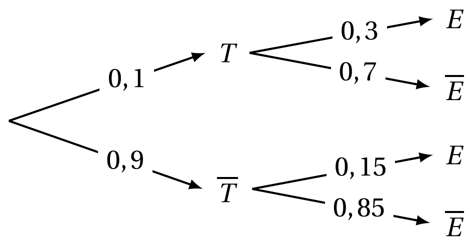
Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **6 points**

Partie A :

1. Un arbre pondéré représentant la situation est :



$P\left(\overline{T}\cap E\right) = P\left(\overline{T}\right)\times P_{\overline{T}}(E) = 0,9\times 0,15 = 0,135.$

2. Les évènements T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(E) = P\big(T\cap E\big) + P\big(\overline{T}\cap E\big)$

On a donc : $P(E) = 0,1\times 0,3 + 0,135 = 0,165.$

La probabilité qu'une erreur soit détectée lors du contrôle est égale à 0,165.

3. $P_E(T) = \dfrac{P(T\cap E)}{P(E)} = \dfrac{0,1\times 0,3}{0,165} \approx 0,1818.$

La probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée vaut environ 0,18, arrondie au centième.

Partie B : Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0,165$. La détection d'une erreur lors d'un contrôle est indépendante des autres contrôles.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

1. Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0,165$ donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,165$.

2. $P(X=5) = \dbinom{15}{5}\times 0,165^5\times 0,835^{15-5}.$

$= 3003\times 0,165^5\times 0,835^{10}$

$\approx 0,0605$

Finalement, avec les consignes d'arrondi : $P(X=5)\approx 0,06$

La probabilité qu'exactement 5 erreurs soient détectées vaut 0,06.

3. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,835^{15} \approx 0,933\,1$.

   La probabilité qu'au moins une erreur soit détectée vaut $0,93$.

4. Soit n le nombre de contrôles effectués chaque jour.

   Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

   Y suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,165$.

   $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,835^n$

   On souhaite que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée chaque jour soit supérieure à 99 %.

   On veut donc que $1 - 0,835^n \geqslant 0,99$.

   $1 - 0,835^n \geqslant 0,99 \iff 0,01 \geqslant 0,835^n$

   $\iff \ln(0,01) \geqslant \ln\left(0,835^n\right)$ car la fonction logarithme est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$

   $\iff \ln(0,01) \geqslant n\ln(0,835)$

   $\iff \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,835)} \leqslant n$ car $\ln(0,835) < 0$ donc son inverse aussi

   or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,835)} \approx 25,5$

   Il faut déclencher 26 contrôles chaque jour.

Partie C :

Le magasin comporte trois caisses automatiques identiques qui, lors d'une journée, ont chacune déclenché 20 contrôles. On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires associant à chacune des caisses le nombre d'erreurs détectées lors de cette journée.

On admet que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes entre elles et suivent chacune une loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;\,0,165)$.

1. X_1 suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,175$.

   Donc $E(X_1) = n \times p = 20 \times 0,165 = 3,3$

   et $V(X_1) = n \times p \times (1 - p) = 20 \times 0,165 \times 0,835 = 2,755\,5$

2. $E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3 \times E(X_1) = 3 \times 3,3 = 9,9$

   Les variables X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes donc :

   $V(S) = V(X_1 + X_2 + X_3) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 3 \times V(X_1) = 3 \times 2,7555 = 8,266\,5$.

3. L'évènement « $6 < S < 14$ » revient à $|S - 10| < 4$ et

   $P\Big(|S-10| < 4\Big) = 1 - P\Big(|S-10| \geqslant 4\Big)$.

   Or, pour tout réel $t > 0$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

   $P\Big(|S - E(S)| \geqslant t\Big) \leqslant \dfrac{V(S)}{t^2}$

   Pour $t = 4$ on obtient : $P\Big(|S-10| \geqslant 4\Big) \leqslant \dfrac{8,2665}{4^2}$.

   D'où $P\Big(|S-10| < 4\Big) = 1 - P\Big(|S-10| \geqslant 4\Big) \geqslant 1 - \dfrac{8,2665}{16}$.

Or $1 - \dfrac{8,2665}{16} \approx 0,4833$

donc la probabilité que le nombre total d'erreurs sur la journée soit strictement compris entre 6 et 14 est bien supérieure à 0,48.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Les droites (AB) et (d) sont : sécantes non perpendiculaires.

Un vecteur directeur de la droite (AB) est le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$. Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ est donc aussi un vecteur directeur de la droite (AB).

Un vecteur directeur de la droite (d) est $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et (d) ne sont pas parallèles.

Le repère est orthonormé, on peut donc utiliser les coordonnées des vecteurs pour calculer le produit scalaire.

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u'} = 2 \times 3 + 0 \times 2 - 1 \times (-5) = 11 \neq 0$

donc les droites (AB) et (d) ne sont pas perpendiculaires.

Une équation paramétrique de la droite (AB) de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et passant par le point A$(-3; 1; 4)$ est :

$$\begin{cases} x = -3 + 2s \\ y = 1 + 2s \\ z = 4 - s \end{cases} \quad \text{où } s \in \mathbb{R}.$$

Les deux droites sont sécantes si et seulement si le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} -3 + 2s = -6 + 3t \\ 1 + 2s = 1 \\ 4 - s = 9 - 5t \end{cases} \iff \begin{cases} 2s - 3t = -3 \\ s = 0 \\ s - 5t = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} -3t = -3 \\ s = 0 \\ -5t = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 \\ s = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

Le système admet une unique solution donc les droites sont sécantes.

2. La droite(AB) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ soit le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

La droite (AB) est donc orthogonal au plan $\mathscr{P}$.

3. **Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires.**

   Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'$ est $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires donc les plans ne sont pas parallèles.

   On est dans un repère orthonormé, on peut donc utiliser les coordonnées pour calculer le produit scalaire.

   $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n'} = 4\times 2+4\times 1-2\times(-6) = 8+4-12 = 0$

   Les vecteurs normaux sont orthogonaux donc les plans sont perpendiculaires.

4. **La valeur de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ arrondie au degré est $51°$.**

   On a : $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$.

   On est dans un repère orthonormé donc on peut utiliser les coordonnées pour calculer les longueurs et le produit scalaire.

   Calculons le produit scalaire de ces deux vecteurs de deux manières différentes :

   d'une part : $\overrightarrow{\text{AC}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = 3\times 4+0\times 4-5\times(-2) = 22$

   d'autre part :

   AC$=\sqrt{(-3)^2+0^2+(-5)^2} = \sqrt{34}$ et AB$=\sqrt{4^2+4^2+(-2)^2} = \sqrt{36} = 6$

   On a donc $\overrightarrow{\text{AC}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = \text{AB}\times\text{AC}\times\cos\left(\widehat{\text{BAC}}\right) = 6\sqrt{34}\cos\left(\widehat{\text{BAC}}\right)$

   D'où : $22 = 6\sqrt{34}\cos\left(\widehat{\text{BAC}}\right)$, donc $\cos\left(\widehat{\text{BAC}}\right) = \dfrac{22}{6\sqrt{34}}$

   D'où $\widehat{\text{BAC}} \approx 51°$

EXERCICE 3 **6 points**

Partie A :

1. D'une part : $\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to -1^+} x+1 = 0^+\\ \displaystyle\lim_{X\to 0} \ln X = -\infty\end{cases}$ donc par composition $\displaystyle\lim_{x\to -1} 4\ln(x+1) = -\infty$

   D'autre part, $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{-x^2}{25} = -\frac{1}{25}$

   donc par somme $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$

2. f est dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty[$.

   f est de la forme $4\ln(u)-v$ avec $u(x) = x+1$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{25}$.

   On a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{2x}{25}$

   Or $f' = 4\dfrac{u'}{u} - v'$ donc :

Pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = 4\frac{1}{x+1} - \frac{2x}{25} = \frac{4\times 25-(x+1)2x}{25(x+1)} = \frac{100-2x-2x^2}{25(x+1)}$$

3. Pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{100-2x-2x^2}{25(x+1)}$$

$25(x+1)>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $100-2x-2x^2$, fonction polynôme du second degré donc le coefficient dominant (-2) est négatif.

$\Delta = (-2)^2 - 4\times 100\times(-2) = 804 > 0$

$100-2x-2x^2 = 0$ admet donc deux racines :

$x_1 = \dfrac{2-\sqrt{804}}{2(-2)} = \dfrac{-1+\sqrt{201}}{2} \approx 6,6$

et $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{804}}{2(-2)} = \dfrac{-1-\sqrt{201}}{2} \approx -7,6 < -1$

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	-1		x_1		$+\infty$
signe de $f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
variations de f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	

$[2\ ;\ 6,5] \subset]-1\ ;\ x_1[$ donc f est strictement croissante sur $[2\ ;\ 6,5]$.

4. $h(2) = f(2)-2 = 4\ln(2+1) - \dfrac{2^2}{25} - 2 \approx 2,23.$

Sur l'intervalle $[2\ ;\ m]$ la fonction h est strictement croissante, or $h(2)>0$ donc sur $[2\ ;\ m]$, $h(x)>0$ et l'équation $h(x)=0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $[m\ ;\ 6,5]$, la fonction h est strictement décroissante et continue.

$h(m) = M \approx 2,265 > 0$

et $h(6,5) = 4\ln(6,5+1) - \dfrac{6,5^2}{25} - 6,5 \approx -0,13 < 0$

0 est donc une valeur intermédiaire entre $h(m)$ et $h(6,5)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotone, l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[m\ ;\ 6,5]$.

Finalement, l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2\ ;\ 6,5]$.

5. **a.** Avec la calculatrice on trouve que les valeurs renvoyées par la commande bornes (2) sont : (6.36, 6.37)

b. Dans le contexte de l'exercice, un encadrement de α est $6,36 < \alpha < 6,37$.

Partie B :

1. Pour tout entier naturel n, on pose P_n, l'affirmation : « $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5.$ ».

Initialisation : On a, d'une part : $u_0 = 2$,

Et, d'autre part : $u_1 = f(u_0) = f(2) \approx 4,23$

Donc $2 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 6,5$

Pour $n = 0$, l'affirmation P_0 est vraie.

Hérédité : Soit n naturel , tel que l'affirmation P_n est vraie, c'est-à-dire :

« $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$ ».

On veut montrer que cela implique que l'affirmation P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$

Or la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2~;~6,5]$ donc :

$f(2) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(6,5)$

or $f(2) \approx 4,23 > 2$ et $f(6,5) \approx 6,37 < 6,5$

donc, par définition de la suite u, $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 6,5$

c'est l'inégalité P_{n+1}

Conclusion : L'affirmation est vraie au rang 0, et, pour tout rang naturel non nul, sa véracité est héréditaire, donc, en vertu du principe de démonstration par récurrence, on peut vérifier l'inégalité P_n pour tout entier naturel n.

2. Pour tout entier n , $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite u est croissante,

de plus pour tout entier n, $u_n \leqslant 6,5$ donc la suite u est majorée,

or tout suite croissante et majorée est convergente, donc la suite (u_n) converge vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 6,5$.

3. La suite u est une suite convergente vers une limite ℓ de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f fonction continue. D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ ou $h(x) = 0$

On sait de plus que cette limite appartient à l'intervalle $[2~;~6,5]$ et que sur cette intervalle l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α on a donc $\ell = \alpha$.

On rappelle que le réel α, défini dans la partie **A**, est la solution de l'équation $h(x) = 0$ sur l'intervalle $[2~;~6,5]$.

EXERCICE 4 — 4 points

Partie A :

On considère l'équation différentielle (E_1) : $y' + 0,48y = \dfrac{1}{250}$ où y est une fonction de la variable t définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

1. La fonction h est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout réel positif t, $h'(t) = 0$. On a dont $h'(t) + 0,48h(t) = 0 + 0,48 \times \dfrac{1}{120} = \dfrac{1}{250}$

Donc la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1).

2. Les solutions de l'équation différentielle $y' + 0,48y = 0$ sont les fonctions de la forme $f(t) = C\mathrm{e}^{-0,48t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3. Les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont donc les fonctions de la forme $f(t) = C\mathrm{e}^{-0,48t} + \dfrac{1}{120}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Partie B :

1. Supposons que p est solution de l'équation différentielle (E_2),

On a donc $p' = \dfrac{1}{250}p \times (120 - p)$

Or $p = \dfrac{1}{y}$ et $p' = \dfrac{-y'}{y^2}$

$$\frac{-y'}{y^2} = \frac{1}{250}\frac{1}{y} \times \left(120 - \frac{1}{y}\right) \Longrightarrow -y' = y^2 \times \frac{1}{250y} \times \frac{120y-1}{y}$$

D'où

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow -y' = \frac{1}{250} \times (120y - 1) \\ &\Longleftrightarrow -y' = 0,48y - \frac{1}{250} \\ &\Longleftrightarrow y' + 0,48y = \frac{1}{250} \end{aligned}.$$

Donc y est solution de l'équation différentielle (E_1) : $y' + 0,48y = \dfrac{1}{250}$.

2. y est de la forme $y(t) = C\mathrm{e}^{-0,48t} + \dfrac{1}{120}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{on a donc } p(t) &= \frac{1}{y(t)} \\ &= \frac{1}{C\mathrm{e}^{-0,48t} + \frac{1}{120}} \text{ avec } C \in \mathbb{R} \\ &= \frac{120}{120C\mathrm{e}^{-0,48t} + 1} \text{ avec } C \in \mathbb{R} \\ &= \frac{120}{K\mathrm{e}^{-0,48t} + 1} \text{ avec } K \in \mathbb{R} \text{ en posant } K = 120C \end{aligned}$$

3. On sait que $p(0) = 30$ donc $\dfrac{120}{K\mathrm{e}^0 + 1} = 30$,

donc $\dfrac{120}{30} = K + 1$ d'où $K = \dfrac{120}{30} - 1 = 3$.

4. On sait que : $\begin{cases} \lim\limits_{t \to +\infty} -0,48t = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0 \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,48t} = 0$.

Donc, par produit et somme, $\lim\limits_{t \to +\infty} 1 + 3\mathrm{e}^{-0,48t} = 1$

et finalement par quotient, $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t) = 120$.

Dans le contexte de l'exercice la population de la bactérie se stabilisera vers 120 000.

5. $$\begin{aligned} p(t)=60 &\iff \dfrac{120}{3\mathrm{e}^{-0,48t}+1}=60\\ &\iff 120 = 60\times\left(3\mathrm{e}^{-0,48t}+1\right)\\ &\iff 2 = 3\mathrm{e}^{-0,48t}+1\\ &\iff \dfrac{1}{3}=\mathrm{e}^{-0,48t}\\ &\iff -0,48t=\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\ln(3)\\ &\iff t=\dfrac{\ln(3)}{0,48}\approx 2,289 \end{aligned}$$

Le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus est de $2,289$ heures soit 2 heures et 17 minutes.