Corrigé du concours contrôleur des douanes session 2019

Branche aéronautique : pilote d'avion

Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Exercice 1

1.

- $u_1 = \dfrac{1+8}{2\times 1+1} = \dfrac{9}{3} = 3$;
- $u_2 = \dfrac{3+8}{2\times 3+1} = \dfrac{11}{7}$;
- $u_3 = \dfrac{\frac{11}{7}+8}{2\times\frac{11}{7}+1} = \dfrac{\frac{67}{7}}{\frac{29}{7}} = \dfrac{67}{29}$.

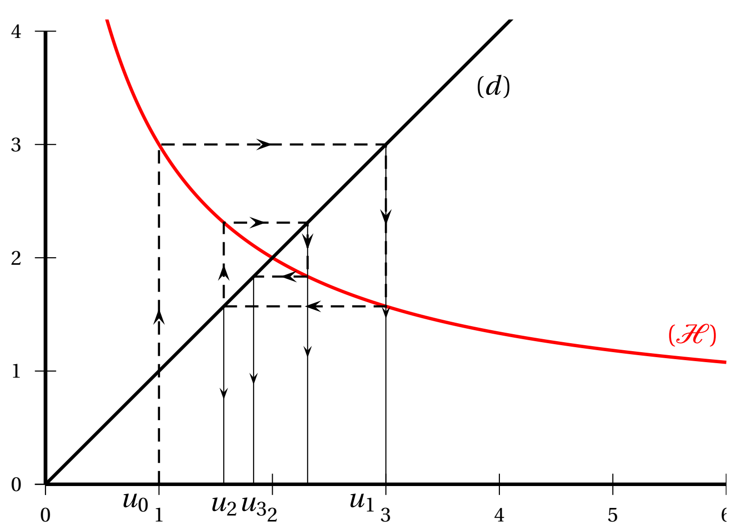
2. Soit la fonction h définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par :

$$h(x) = \frac{x+8}{2x+1}$$

et $(\mathscr{H})$ sa courbe représentative.

a. Sur l'intervalle de définition de h, $2x+1 \neq 0$, donc h est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = \dfrac{2x+1-2(x+8)}{(2x+1)^2} = \dfrac{-15}{(2x+1)^2}$.
Comme $2x+1 > 0 \Rightarrow (2x+1)^2 > 0$, le signe de $h'(x)$ est celui du numérateur, donc $h'(x) < 0$: la fonction h est strictement décroissante.

b.



c. L'« escargot » laisse à penser que la suite (u_n) converge vers l'abscisse du point commun à $(\mathscr{H})$ et à la droite (d) (donc à peu près 2).

3. (v_n) est la suite définie pour tout n par :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}.$$

a.

- $v_0 = \dfrac{u_0 - 2}{u_0 + 2} = \dfrac{-1}{3} = -\dfrac{1}{3}$;
- $v_1 = \dfrac{3-2}{3+2} = \dfrac{1}{5}$;
- $v_2 = \dfrac{\frac{11}{7} - 2}{\frac{11}{7} + 2} = \dfrac{11 - 14}{11 + 14} = -\dfrac{3}{25}$.

b. On a $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 2} = \dfrac{\dfrac{u_n + 8}{2u_n + 1} - 2}{\dfrac{u_n + 8}{2u_n + 1} + 2} = \dfrac{-3u_n + 6}{5u_n + 10} = \dfrac{-3(u_n - 2)}{5(u_n + 2)} = -\dfrac{3}{5}\dfrac{u_n - 2}{u_n + 2} = -\dfrac{3}{5}v_n$: ceci montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{3}{5}$ et de premier terme $v_0 = -\dfrac{1}{3}$.

c. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_n = v_0 \times q^n$, $\quad q$ étant la raison de la suite géométrique : ici $v_n = -\dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{3}{5}\right)^n$.

Or $-1 = -\dfrac{5}{5} < -\dfrac{3}{5} < \dfrac{5}{5} = 1$ et alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$ et par suite

$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$.

La suite (v_n) converge vers zéro.

4. $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2} \iff v_n(u_n + 2) = u_n - 2 \iff v_n u_n + 2v_n = u_n - 2 \iff v_n u_n - u_n = -2v_n - 2 \iff u_n(v_n - 1) = -2(v_n + 1) \iff u_n = \dfrac{-2(v_n + 1)}{v_n - 1}$.

De $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} -2(v_n + 1) = -2$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n - 1 = -1$, on en déduit par quotient de limites que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Remarque : l'abscisse du point commun à $(\mathscr{H})$ et à la droite (d) est solution de l'équation :

$\dfrac{x+8}{2x+1} = x \iff x + 8 = x(2x+1) \iff x + 8 = 2x^2 + x \iff 2x^2 = 8 \iff x^2 = 4 \iff (x+2)(x-2) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+2 & = & 0 \\ x-2 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2 \\ x & = & 2 \end{array}\right.$

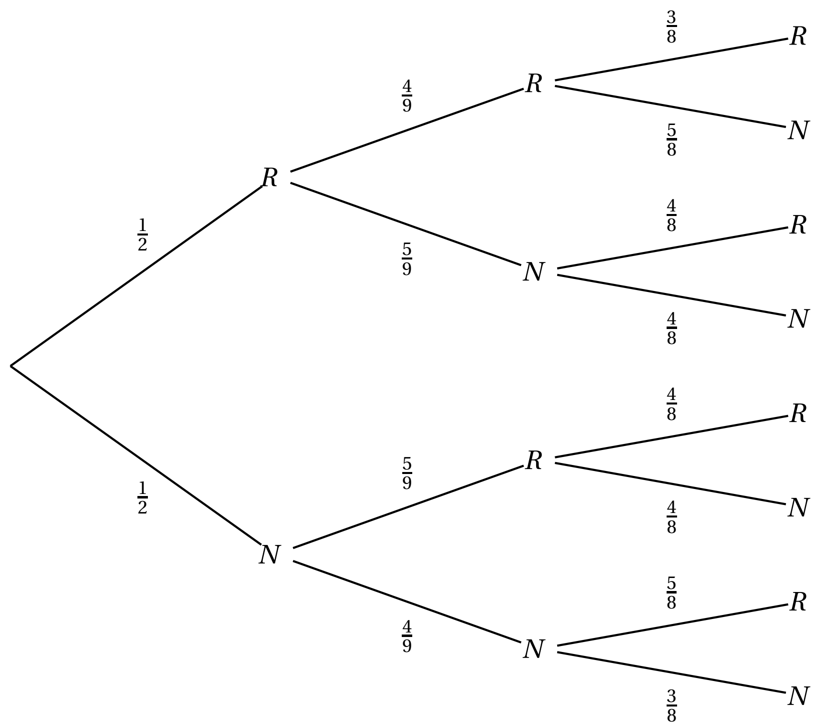
La solution $-2 \notin \left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$, donc on trouve bien la solution 2 vue sur le graphique.

Exercice 2

Un jeu consiste à extraire, au hasard et simultanément, 3 boules d'une urne contenant 5 boules rouges et 5 boules noires.
Si le joueur obtient 3 boules rouges, évènement que l'on note R_3, il gagne 500 euros.
S'il obtient 2 boules rouges et 1 boule noire, évènement que l'on note R_2, il gagne 300 euros.
Enfin, s'il obtient strictement moins de 2 boules rouges il ne gagne rien, on note cet évènement E.

1. *À l'ancienne*

Avec un arbre



• On a $p(RRR) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{9} \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{1 \times 4 \times 3}{2 \times 9 \times 8} = \dfrac{1}{12}$.

• On a $p(R_2) = p(RRN) + p(RNR) + p(NRR) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{9} \times \dfrac{5}{8} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{9} \times \dfrac{4}{8} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{9} \times \dfrac{4}{8} = 3 \times \dfrac{1 \times 4 \times 5}{2 \times 8 \times 9} = \dfrac{5}{2 \times 2 \times 3} = \dfrac{5}{12}$.

• On a donc $p(E) = 1 - \left(p(R_3) + p(R_2)\right) = 1 - \left(\dfrac{1}{12} + \dfrac{5}{12}\right) = 1\dfrac{6}{12} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

2. On a donc $E(X) = 500 \times \dfrac{1}{12} + 300 \times \dfrac{5}{12} + 0 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{500 + 1\,500}{12} = \dfrac{2\,000}{12} = \dfrac{500}{3} \approx 166,67$ €.

3. **a.** Dans ce cas il reste 2 rouges et 5 noires, donc $p(\text{Banco}) = \dfrac{5}{7}$.

b. Dans ce cas il reste 3 rouges et 4 noires, donc $p(\text{Banco}) = \dfrac{4}{7}$.

c. La probabilité d'empocher les 1 000 euros du « Banco »est donc égale à :
$\dfrac{1}{12} \times \dfrac{5}{7} + \dfrac{5}{12} \times \dfrac{4}{7} + \dfrac{1}{2} \times 0 = \dfrac{5 + 20}{12 \times 7} = \dfrac{25}{84}$.
On note Y la variable aléatoire donnant le gain du joueur dans ce nouveau jeu. Y peut donc prendre les valeurs 0, 200 ou 1 000.

d. La probabilité d'empocher les 200 € est égale à :
$\dfrac{1}{12} \times \dfrac{2}{7} + \dfrac{5}{12} \times \dfrac{3}{7} = \dfrac{2 + 15}{12 \times 7} = \dfrac{17}{84}$.

e. On a $E(Y) = 1000 \times \dfrac{25}{84} + 200 \times \dfrac{17}{84} + 0 \times \dfrac{42}{84} = \dfrac{25\,000 + 3\,400}{84} = \dfrac{28\,400}{84} = \dfrac{7\,100}{21} \approx 338,10$ €. Ce jeu est en moyenne plus avantageux que le premier.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x),$$

$\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. **a.** On a pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi) = 1+\cos(x+2\pi)+\frac{1}{2}\cos(2x+4\pi) = 1+\cos x+\frac{1}{2}\cos(2x)$, donc f est 2π-périodique.

   b. On a $\cos(-x) = \cos x$ et $\cos(-2x) = \cos(2x)$, donc f est paire.

   c. Puisque f est 2π périodique et que f est paire, on peut étudier f sur l'intervalle $[0~;~\pi]$; par symétrie autour de l'axe des ordonnées on aura la représentation sur $[-\pi~;~\pi]$, puis par translation de vecteur $2\pi\overrightarrow{\imath}$ on aura la représentation sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = -\sin x - \frac{1}{2} \times 2\sin(2x) = -\sin x - \sin 2x$.

   b. Comme $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, il suit :
   $f'(x) = -\sin x - 2\sin x\cos x = -\sin x(1+2\cos x)$.

3. $\sin x(1+2\cos x) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl}\sin x & = & 0\text{ ou}\\ 1+\cos x & = & 0\end{array}\right.$

   Or $\sin x = 0 \iff x = 0\text{ ou } x = \pi$ et

   $1+\cos x = 0 \iff \cos x = -1 \iff x = \pi$

   Finalement sur $[0~;~\pi]$, $S = \{0~;~\pi\}$.

4. Sur $[0~;~\pi]$, $\sin x \geqslant 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-(1+2\cos x)$.
   - $-(1+2\cos x) \geqslant 0 \iff -1 \geqslant 2\cos x \iff \cos x \leqslant -\frac{1}{2} \iff \cos x \leqslant \cos\frac{2\pi}{3} \iff x \geqslant \frac{2\pi}{3}$: sur l'intervalle $\left[\frac{2\pi}{3}~;~\pi\right]$, la fonction f est croissante.
   - De même on trouve que sur $\left[0~;~\frac{2\pi}{3}\right]$, le fonction f est décroissante

5. $f(0) = 1+1+\frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$;

   $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$;

   $f(\pi) = 1 + (-1) + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.

   D'où le tableau de variations :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	2,5	$\searrow$	0,25	$\nearrow$	0,5

Exercice 4

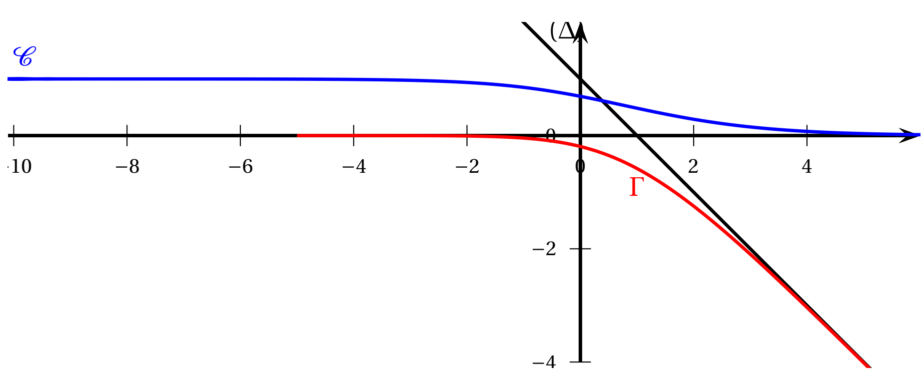
Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} - \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)$$

1. g différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (car $1+\mathrm{e}^x > 1 > 0$) est dérivable sur cet intervalle où :
$g'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x) - \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} - \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{-\mathrm{e}^{2x}}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$ qui est manifestement inférieure à zéro quel que soit $x \in \mathbb{R}$.
La fonction g est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.
   - Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, on a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) = 0$, donc finalement $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$.
   - Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

   Par ailleurs $g(0) = \dfrac{1}{2} - \ln 2 \approx -0,193$
2. Soit la fonction d définie sur $\mathbb{R}$ par :
$d(x) = g(x) - (-x+1) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} - \ln(1+\mathrm{e}^x) + x - 1 = \dfrac{\mathrm{e}^x + (x-1)(1+\mathrm{e}^x)}{1+\mathrm{e}^x} - \ln(1+\mathrm{e}^x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(1+x-1)}{1+\mathrm{e}^x} - \ln(1+\mathrm{e}^x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x + x - 1}{1+\mathrm{e}^x} - \ln(1+\mathrm{e}^x)$.
Or $\dfrac{x\mathrm{e}^x + x - 1}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{\mathrm{e}^x(x + x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{-x}+1)} = \dfrac{x + x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}$.
D'autre part : $\ln(1+\mathrm{e}^x) = \ln(\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{-x}+1)) = \ln \mathrm{e}^x + \ln(\mathrm{e}^{-x}+1) = x + \ln(\mathrm{e}^{-x}+1)$.
En utilisant ces deux écritures on a donc :
$d(x) = \dfrac{x + x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1} - x - \ln(\mathrm{e}^{-x}+1) =$
$\dfrac{x + x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} - x}{\mathrm{e}^{-x}+1} - \ln(\mathrm{e}^{-x}+1) = \dfrac{x\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1} - \ln(\mathrm{e}^{-x}+1)$.
Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right) = 0$.
Conclusion : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} d(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) - (-x+1) = 0$ signifie que la droite (Δ) d'équation $y = -x+1$ est asymptote à la représentation graphique de g au voisinage de plus l'infini.
3.



Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right).$$

1. **a.** On peut écrire $f(x) = \dfrac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)}{\mathrm{e}^{x}}$Posons $\mathrm{e}^{x} = u$; on a donc :
$f(u) = \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ que l'on peut écrire $f(u) = \dfrac{\ln(1+u)-\ln 1}{u-0}$. Quand $x \to -\infty$, alors $u \to 0$, mais alors par définition du nombre dérivé :
$\displaystyle\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)-\ln 1}{u-0} = f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1.$
Conclusion : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ signifie que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de moins l'infini.

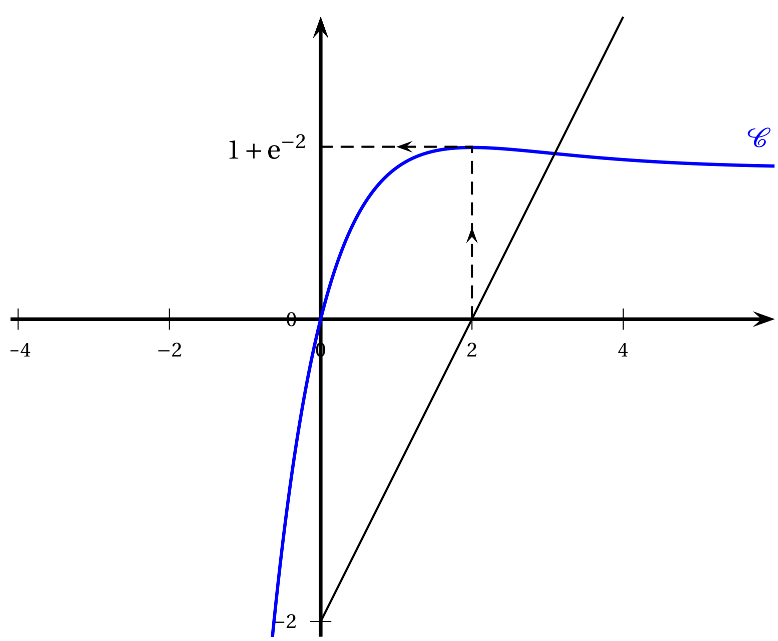
   b. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)}{\mathrm{e}^{x}} = 1$ et en posant $1+\mathrm{e}^{x} = u$, on a
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)}{1+\mathrm{e}^{x}} = \lim_{u\to+\infty}\frac{\ln(1+u)}{1+u} = 0$, (par croissance comparée) donc finalement :
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$: ceci signifie que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de plus l'infini.

2. f produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur cet intervalle où :
$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right) + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}\times\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}} = \mathrm{e}^{-x}\left[\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}} - \ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)\right] = \mathrm{e}^{-x}g(x)$
3. Comme quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$, or on a vu dans la partie A que g décroit de 0 à moins l'infini, donc $g(x) \leqslant 0$ et par suite $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante
4. Voir ci-dessus.

Exercice 5

Partie A

1.



2. **a.** La fonction f étant croissante sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ de $f(0)=0$ à $f(2)$, donc **positive** l'intégrale est égale à l'aire en unités d'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=2$.

   b. Le maximum de la fonction f étant $f(2)\approx 1,14$, l'aire précédente est inférieure à celle du rectangle de longueur 2 et de largeur 1,14 soit $2\times 1,14=2,28<2,5$.

   On a donc $0\leqslant g(2)\leqslant 2,5$

3. **a.** $\displaystyle\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est égale à l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=2$ et $X=x$. Puisque $f(2)\approx,14$ cette aire est donc supérieure à celle du rectangle de côté $x-2$ et 1, donc d'aire $x-2$.

   Donc $\displaystyle\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t > x-2$

   Or par linéarité de l'intégrale :

   $\displaystyle\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=g(x)-g(2).$

   Puisque $g(x)-g(2)\geqslant x-2$, a fortiori $g(x)\geqslant x-2$.

   b. D'apr!s le résultat précédent, comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x-2=+\infty$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

4. Par définition on a pour tout réel : $g'(x)=f(x)$; or le signe de f est donné par le tableau initial, donc :
   - sur $]-\infty\,;\,0[$, $g'(x)<0$: la fonction g est donc décroissante sur cet intervalle ;
   - sur $]0\,;\,\infty[$, $g'(x)>0$: la fonction g est donc croissante sur cet intervalle ;

Partie B

On admet que, pour tout réel t, $\quad f(t)=(t-1)\mathrm{e}^{-t}+1$.

1. h produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur cet intervalle où :
   $h'(t)=-\mathrm{e}^{-t}-\left(-t\mathrm{e}^{-t}\right)=-\mathrm{e}^{-t}(1-t)=(t-1)\mathrm{e}^{-t}$: ce qui montre que la fonction h est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t\longmapsto(t-1)\mathrm{e}^{-t}$.
2. On a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle g(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\left[(t-1)\mathrm{e}^{-t}+1\right]\,\mathrm{d}t=$
   $\displaystyle g(x)=\int_0^x (t-1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t+\int_0^x 1\,\mathrm{d}t=[h(t)+t]_0^x=h(x)+x-[h(0)+0]=h(x)+x-h(0)=$
   $-x\mathrm{e}^{-x}+x-0=x-x\mathrm{e}^{-x}=g(x)=x\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right).$
3. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$, d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}1-\mathrm{e}^{-x}=1$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ par produit de limites :
   $$\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty.$$