✿ Concours contrôleur des douanes session 2015 ✿

Branche aéronautique : pilote d'avion

Durée : 3 heures

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3\text{e}^x.$$

1. • On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{e}^x = +\infty$,donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
   • Soit X tel que $X = -x$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} f(X) = -X^3\text{e}^{-X}$.
   Or on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} X^n\text{e}^{-X} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
2. Produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f l'est aussi et sur cet intervalle :
   $f'(x) = 3x^2\text{e}^x + x^3\text{e}^x = x^2\text{e}^x(3+x)$.
   Comme quel que soit le réel x, $x^2\text{e}^x \geqslant 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $3+x)$:
   • $3+x>0 \iff x>-3$: $f'(x)>0$ sur $]-3\,;\,+\infty[$ et f est croissante sur cet intervalle ;
   • $3+x<0 \iff x<-3$: $f'(x)<0$ sur $]-\infty\,;\,3[$ et f est décroissante sur cet intervalle ;
   • $3+x=0 \iff x=-3$: $f'(-3)=0$, $f(-3) = -27\text{e}^{-3} \approx -1,344$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal du plan.
   a. Soit $\mathscr{T}_0$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. On sait que
   $M(x\,;\,y) \in \mathscr{T}_0 \iff y - f(0) = f'(0)(x-0)$.
   Avec $f(0)=0$ et $f'(0)=0$, on a : $M(x\,;\,y) \in \mathscr{T}_0 \iff y=0$ (équation de l'axe des abscisses)
   b. Soit $\mathscr{T}_{-3}$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -3. On sait que
   $M(x\,;\,y) \in \mathscr{T}_{-3} \iff y - f(-3) = f'(-3)(x-(-3))$.
   Avec $f(-3) = -27\text{e}^{-3}$ et $f'(-3) = 0$, (voir plus haut) on a : $M(x\,;\,y) \in \mathscr{T}_{-3} \iff y + 27\text{e}^{-3} = 0(x+3) \iff y = -27\text{e}^{-3}$ (tangente horizontale elle aussi).
   c. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (trouvé à la question 1.) signifie géométriquement que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de moins l'infini.
   d. Quel que soit $x<0$, $f(x) = x^3\text{e}^x < 0$: ceci signifie que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$.
4. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)\text{e}^x.$$

   a. F produit d'un fonction polynome et de la fonction exponentielle toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur cet intervalle :
   $F'(x)c = \left(3x^2 - 6x + 6)\right)\text{e}^x + \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)\text{e}^x = \text{e}^x\left(3x^2 - 6x + 6 + x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right) = x^3\text{e}^x = f(x)$.
   Ceci montre que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. Dans l'étude de f on a vu que sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$, $f(x)<0$ donc l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses , la droite d'équation $x=-3$ et la droite d'équation $x=0$ est égale à l'opposé de l'intégrale $\displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$, donc à $-[F(x)]_{-3}^{0} = -F(0)+F(-3) = (-27-27-18-6)\mathrm{e}^{-3} - \left(-6\mathrm{e}^{0}\right) = 6-78\mathrm{e}^{-3}$.
$\mathscr{A} \approx 2,116$ (u. a).

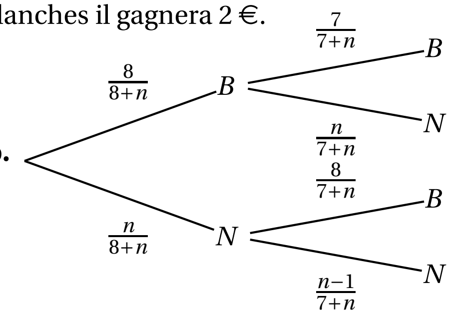
Exercice 2

Une urne contient $n+8$ boules : n boules noires (n étant un entier au moins égal à deux) et huit boules blanches.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes

1. **a.**
- S'il tire 2 boules noires il perdra 4 € ;
- S'il tire 1 boule noire et une boule blanche il perdra $2-1=1$ € ;
- S'il tire 2 boules blanches il gagnera 2 €.

b.



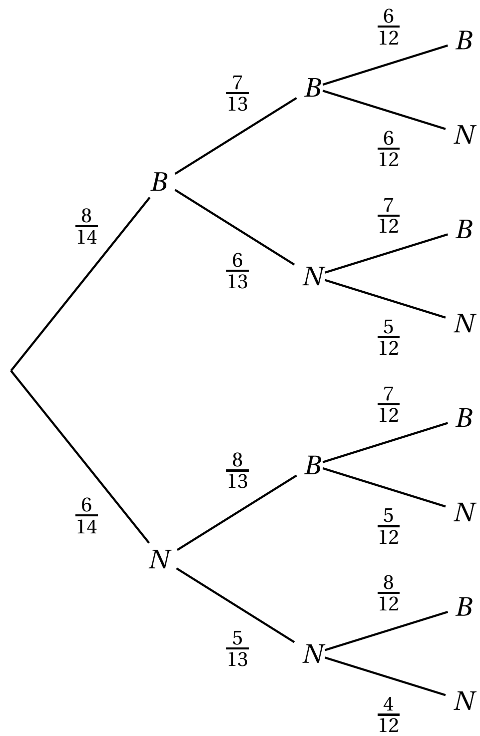
On a
- $p(N\cap N) = \frac{n}{8+n}\times\frac{n-1}{7+n} = \frac{n(n-1)}{(8+n)(7+n)}$;
- $p(B\cap B) = \frac{8}{8+n}\times\frac{7}{7+n} = \frac{56}{(8+n)(7+n)}$;
- $p(B\cap N) = \frac{8}{8+n}\times\frac{n}{7+n}+\frac{n}{8+n}\times\frac{8}{7+n} = \frac{8n}{(8+n)(7+n)}+\frac{8n}{(8+n)(7+n)} = \frac{16n}{(8+n)(7+n)}$;

c. On a $E(X) = -4\times\frac{n(n-1)}{(8+n)(7+n)} - 1\times\frac{56}{(8+n)(7+n)} + 2\times\frac{16n}{(8+n)(7+n)} = \dfrac{-4n(n-1)-56+2\times16n}{(8+n)(7+n)} = \dfrac{-4n^2+4n-56+32n}{(8+n)(7+n)} = \dfrac{-4n^2+36n-56}{(8+n)(7+n)}$.
$E(X)=0 \iff -4n^2+36n-56=0 \iff -4\left(n^2-9n+14\right)=0 \iff n^2-9n+14=0$.
Si ce trinôme a des racines entières elles ne peuvent être que des diviseurs de 14 : 1 et 14 ne sont pas solutions mais 2 et 7 oui car $2^2-9\times2+14=18-18=0$ et $7^2-9\times7+14=63-63=0$.
Conclusion : $E(X)=0 \iff n=2$ ou $x=7$.
Le jeu est équitable avec 2 ou 7 boules noires.

2. Dans cette question, n est fixé égal à 6 (il y a donc 6 boules noires et 8 blanches dans l'urne).

a.
- S'il tire 3 boules noires il perdra 6 € ;
- S'il tire 2 boules noires et une boule blanche il perdra $4-1=3$ € ;
- S'il tire 1 boule noire et deux boule blanche il perdra ou gagnera 2 - 2 = 0 $4-1=3$ € ;
- S'il tire 3 boules blanches il gagnera 3 €.

b.



- $p(B \cap B \cap B) = \frac{8}{14} \times \frac{7}{13} \times \frac{6}{12} \frac{2}{13}$.
- $p(B \cap B \cap N) = \frac{8}{14} \times \frac{7}{13} \times \frac{6}{12} + \frac{8}{14} \times \frac{6}{13} \times \frac{7}{12} + \frac{6}{14} \times \frac{8}{13} \times \frac{7}{12} = \frac{6}{13}$.
- $p(B \cap N \cap N) = \frac{8}{14} \times \frac{6}{13} \times \frac{5}{12} + \frac{6}{14} \times \frac{8}{13} \times \frac{5}{12} + \frac{6}{14} \times \frac{5}{13} \times \frac{8}{12} = \frac{30}{91}$.
- $p(N \cap N \cap N) = \frac{6}{14} \times \frac{5}{13} \times \frac{4}{12} = \frac{5}{91}$.

Vérification : $\frac{2}{13} + \frac{6}{13} + \frac{30}{91} + \frac{5}{91} = \frac{8}{13} + \frac{35}{91} = \frac{56}{91} + \frac{35}{91} = 1$.

Exercice 3

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_n & = & \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sin\left(\frac{2}{n^2}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{n}{n^2}\right) \\ v_n & = & \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}. \end{array}\right.$$

1. On a $v_n = \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$ et l'on sait que $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, donc :
$v_n = \dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \dfrac{n(n+1)}{2n^2} = \dfrac{n^2+n}{2n^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n}$.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

2. **a.** f, g et h sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & x - \sin x, \\ g(x) & = & -1 + \cos x + \frac{x^2}{2} \\ \text{et } h(x) & = & -x + \sin x + \frac{x^3}{6}. \end{array}\right.$$

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle : $f'(x) = 1 - \cos x$.

Comme $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, alors $-1 \leqslant -\cos x \leqslant 1$ et en ajoutant 1 : $0 \leqslant 1-\cos x \leqslant 2$: donc $f'(x) \geqslant 0$.

f est donc croissante en particulier sur $[0~;~+\infty[$ de 0 à plus l'infini, donc $f(x) \geqslant 0$.

• g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle : $g'(x) = -\sin x + x = f(x)$ qui on vient de le voir est positive sur $[0~;~+\infty[$; la fonction est donc croissante de $g(0) = 0$ à plus l'infini : on a également $g(x) \geqslant 0$.

• h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle $h'(x) = -1 + \cos x + \dfrac{x^2}{2} =$
$g(x) \geqslant 0$ sur $[0~;~+\infty[$, donc h est elle aussi croissante à partir de $h(0) = 0$, donc sur $[0~;~+\infty[$, $h(x) \geqslant 0$.

b. *initialisation* : pour $n = 1$, $1^3 \leqslant 1^4$: l'inégalité est vraie au rang 1.

Hérédité : soit $n \geqslant 1$ et supposons que $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 \leqslant n^4$, alors $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 \leqslant n^4 + (n+1)^3$ ou $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 \leqslant n^4 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1$.

Or $(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$.

Comme $n^3 < 4n^3$, $3n^2 < 6n^2$ et $3n < 4n$ en sommant membre à membre on obtient :

$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 < (n+1)^4$: l'inégalité est vraie au rang $n+1$.

L'inégalité est vraie au rang 1 et si elle est vraie à un rang au moins égal à 1, elle l'est aussi au rang suivant : d'après le principe de récurrence :

pour tout $n \geqslant 1$, $\quad 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 \leqslant n^4$.

• On a démontré que sur $[0~;~+\infty[$, $f(x) > 0 \iff x - \sin x > 0 \iff x > \sin x$. On a donc :

$\frac{1}{n^2} > \sin \frac{1}{n^2}$;

$\frac{2}{n^2} > \sin \frac{2}{n^2}$;

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{n}{n^2} > \sin \frac{n}{n^2}$; d'où en sommant membre à membre :

$v_n > u_n \iff u_n < v_n$

• On a démontré que sur $[0~;~+\infty[$, $h(x) > 0 \iff -x + \sin x + \dfrac{x^3}{6} > 0 \iff$

$x < \sin x + \dfrac{x^3}{6}$. On a donc :

$\frac{1}{n^2} < \sin \frac{1}{n^2} + \dfrac{1}{6n^6} \times 1^3$;

$\frac{2}{n^2} < \sin \frac{2}{n^2} + \dfrac{1}{6n^6} \times 2^3$;

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{n}{n^2} < \sin \frac{n}{n^2} + \dfrac{1}{6n^6} \times n^3$; d'où en sommant membre à membre :

$v_n < u_n + \dfrac{1}{6n^6}\left(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3\right)$.

Or on vient de démontrer que pour $x \geqslant 0$, $1^3 + 2^3 + \ldots + x^3 < x^4$, donc en remplaçant dans l'inéquation précédente :

$v_n < u_n + \dfrac{1}{6n^6} \times n^4 \iff v_n < u_n + \dfrac{1}{6n^2} \iff v_n - \dfrac{1}{6n^2} < u_n$.

Finalement pour tout naturel :

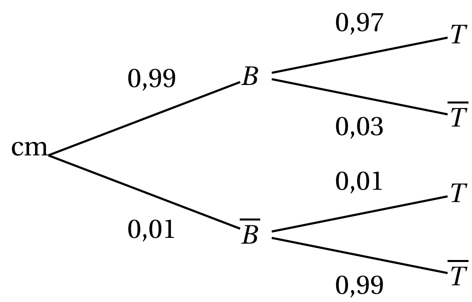
$v_n - \frac{1}{6n^2} \leqslant u_n \leqslant v_n$.

c. On sait que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{6n^2} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n - \dfrac{1}{6n^2} = \lim_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion : d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 4

Arbre pondéré avec :
– évènement B : « la pièce est bonne » ;
–évènement T : « la pièce est acceptée par le test » ;



1. **a.** Il faut trouver $p\left(\overline{B} \cap \overline{T}\right) = p\left(\overline{B}\right) \times p_{\overline{B}}\left(\overline{T}\right) = 0,01 \times 0,99 = 0{,}009\,9$.
   b. On a $p\left(B \cap \overline{T}\right) = p(B) \times p_B\left(\overline{T}\right) = 0,99 \times 0,03 = 0{,}029\,7$.
   c. Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur dans le contrôle ? On a $p\left(B \cap \overline{T}\right) + p\left(\overline{B} \cap \overline{T}\right) = 0{,}009\,9 + 0{,}029\,7 = 0{,}039\,6$ soit un peu moins de 4 %.
2. On peut considérer que l'on a une épreuve de Bernoulli la variable donnant le nombre d'erreurs suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n = 5\ ;\ p = 0{,}039\,6)$.
   La probabilité qu'il y ait 2 erreurs sur 5 contrôles est donc égale à :
   $\binom{5}{2} \times 0{,}039\,6^2 \times (1 - 0{,}039\,6)^{5-2} = 10 \times 0{,}039\,6^2 \times 0{,}960\,4^3 \approx 0{,}013\,9$ donc un peu moins de 1,5 %.

Exercice 5

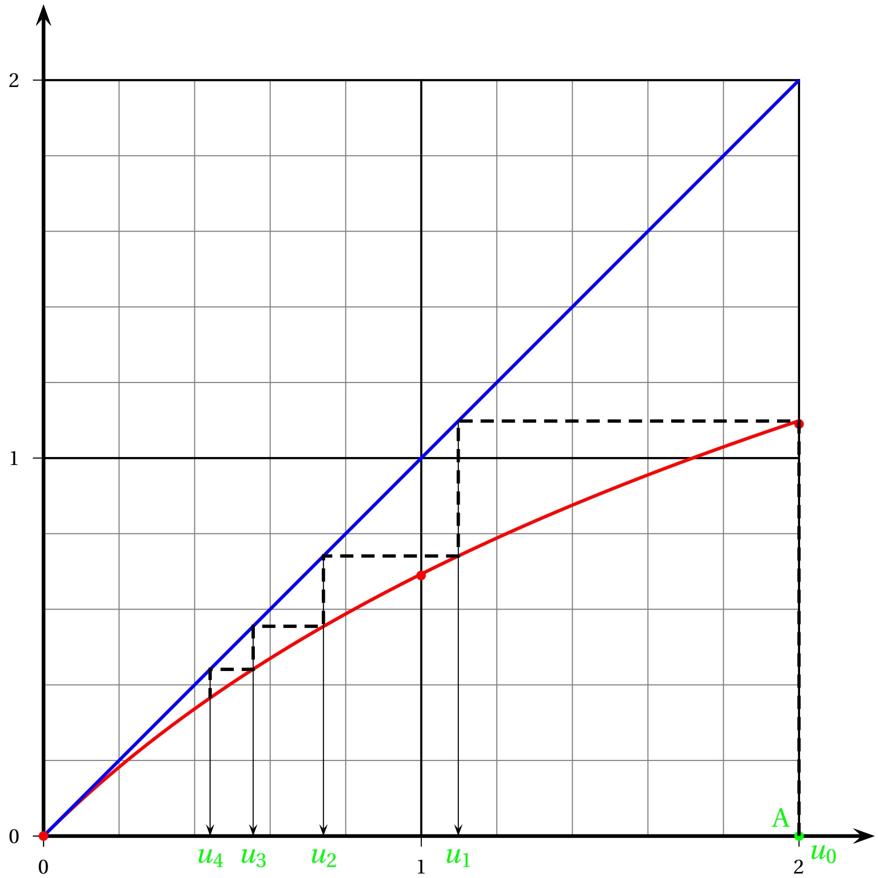
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1 + x).$$

On note (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.
On donne les valeurs approchées au centième près par défaut suivantes :

$$\ln 2 \approx 0,69 \quad ; \quad \ln 3 \approx 1,09.$$

1. f est définie et dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} > 0$ donc f est strictement croissante de moins l'infini (quand x tend vers-1 , $1+x$ tend vers 0 et $\ln(1+x)$ tend vers moins l'infini à plus l'infini en s'annulant en $x = 0$ puisque $f(0) = \ln 1 = 0$.
2. Avec $f(0) = 0$, $\quad f(1) = \ln 2 \approx 069$ et $f(2) = \ln(1+2) = \ln 3 \approx 1,09$:



3. On peut envisager une limite nulle pour la suite (u_n).

4. *Initialisation* : $u_0 = 2 > 0$ la proposition est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$, alors $1 + u_n > 1$ d'où par croissance de la fonction logarithme népérien : $\ln(1 + u_n) > \ln 1$ ou encore $u_{n+1} > 0$: la proposition est vraie au rang $n + 1$

Conclusion : la proposition est vraie au rang 0 et si elle vraie au rang n elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

5.

$$g(x) = \ln(1 + x) - x.$$

Différence de deux fonctions dérivables sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ la fonction g est dérivable et sur cet intervalle :

$g'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{1-1-x}{1+x} = -\dfrac{x}{1+x}$.

Comme $1 + x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $-x$, donc :

- si $-1 < x < 0$, $\quad -x > 0$ et $g'(x) > 0$: par suite la fonction g est croissante sur $]-1\,;\,0[$ de moins l'infini à $g(0) = 0$.
- si $x > 0$, alors $-x < 0$ et $g'(x) < 0$: donc la fonction g est décroissante sur $]0\,;\,+\infty]$ de 0 à moins l'infini..

On vient de démontrer que $x > 0 \Rightarrow g(x) < g(0) = 0$ soit $\ln(1 + x) - x < 0 \iff$ $\ln(1 + x) < x$.

D'autre part $x > 0 \Rightarrow 1 + x > 1 \Rightarrow \ln(1 + x) > \ln 1 = 0$, donc finalement

Si $x > 0$, alors $0 < \ln(1+x) < x$. On a démontré que quel que soit $n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$, donc $g(u_n) < g(0)$.

Or $g(0) = \ln(1+0) - 0 = \ln 1 = 0$, donc $\ln(1+u_n) - u_n < 0 \iff \ln(1+u_n) < u_n \iff u_{n+1} < u_n$ ce qui démontre que la suite (u_n) est décroissante.

6. La suite (u_n) est décroissante et minorée par zéro : elle converge donc vers un réel $\ell \geqslant 0$.

Par continuité la double inégalité $0 < \ln(1+u_n) < u_n$ donne $\ln(1+\ell) = \ell \iff$
$\ln(1+\ell) - \ell = 0 \iff g(\ell) = 0$.

Or l'étude de la fonction g a montré que celle-ci a un maximum unique 0 obteu pour $x = 0$, soit ici $\ell = 0$.

Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.