∾ Corrigé du baccalauréat Asie ∾

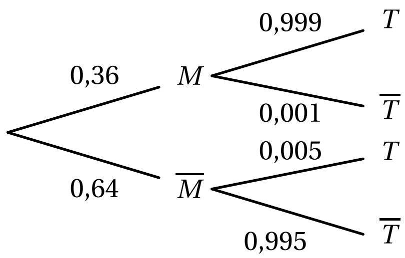
Sujet 2 – 12 juin 2025

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A : Étude d'un exemple

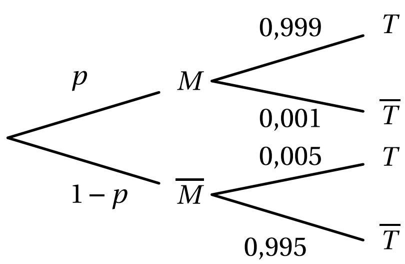
1. D'après l'énoncé : $P_M(T) = 0{,}999$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}005$
2. 270 000 personnes ont été infectées sur 750 000 donc $P(M) = \dfrac{270\,000}{750\,000} = 0{,}36$
3. Voici l'arbre pondéré complété :



4. $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}36 \times 0{,}999 = 0{,}35964$
   donc la probabilité que l'individu soit atteint et que le test soit positif est 0,36 à 10^{-3} près.
5. M et $\overline{M}$ constituent une partition de l'univers donc d'après la loi des probabilités totales :
   $P(T) = P(M\cap T)+P(\overline{M}\cap T) = 0{,}36\times 0{,}999+0{,}64\times 0{,}005 = 0{,}35964+0{,}0032 = 0{,}36284$
   donc la probabilité que l'individu ait un test positif est 0,363 à 10^{-3} près.
6. $P_T(M) = \dfrac{P(M\cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}35964}{0{,}36284} \approx 0{,}991$
7. Puisque $P_T(M) \approx 0{,}991 > 0{,}95$, le test est considéré comme fiable.

Partie B : Dépistage sur une population cible

1. Voici l'arbre pondéré complété :



2. M et $\overline{M}$ constituent une partition de l'univers donc d'après la loi des probabilités totales :
   $P(T) = P(M\cap T)+P(\overline{M}\cap T) = p\times 0{,}999+(1-p)\times 0{,}005 = 0{,}999p+0{,}005-0{,}005p = 0{,}994p+0{,}005$

3. $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{p \times 0,999}{0,994p + 0,005}$

4. Le test est fiable si $P_T(M) > 0,95$:
$\dfrac{0,999p}{0,994p + 0,005} > 0,95 \iff 0,999p > 0,95(0,994p + 0,005) \iff 0,999p > 0,9443p + 0,00475 \iff 0,0547p > 0,00475 \iff p > \dfrac{0,00475}{0,0547} \approx 0,087$ donc, le test est fiable si $p > 0,087$ (soit 8,7%).

Partie C : Étude sur un échantillon

X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,36$.
On cherche le plus petit n tel que $P(X \geqslant 1) > 0,99$
$P(X \geqslant 1) > 0,99 \iff 1 - P(X = 0) > 0,99 \iff -P(X = 0) > -0,01 \iff P(X = 0) < 0,01$
or $P(X = 0) = (1 - 0,36)^n = 0,64^n$ donc $P(X \geqslant 1) > 0,99 \iff 0,64^n < 0,01 \iff \ln(0,64^n) \leqslant \ln(0,01)$ car la fonction ln est croissante sur $]0, +\infty[$
$\iff n\ln(0,64) \leqslant \ln(0,01) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,64)}$ car $\ln(0,64) < 0$ or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,64)} \approx 10,32$,
donc Il faut interroger au moins 11 individus pour que la probabilité qu'au moins l'un d'eux soit atteint dépasse 99 %.

EXERCICE 2 — 5 points

Partie A

1. $u_1 = \dfrac{1}{2}u_0 + 10 = \dfrac{1}{2} \times 30 + 10 = 15 + 10 = 25$ et $u_2 = \dfrac{1}{2}u_1 + 10 = \dfrac{1}{2} \times 25 + 10 = 12,5 + 10 = 22,5$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = \left(\dfrac{1}{2}u_n + 10\right) - 20 = \dfrac{1}{2}u_n - 10 = \dfrac{1}{2}(u_n - 20) = \dfrac{1}{2}v_n$.

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 20 = 30 - 20 = 10$.

3. Pour tout entier n, $v_n = v_0 \times q^n = 10 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

4. Pour tout entier n, $u_n = v_n + 20 = 10 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 20 = 20 + 10 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

5. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ (q^n , avec $0 < q < 1$) donc par produit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 10 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et donc par somme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 20$

Partie B

1. $w_1 = \dfrac{1}{2} \times u_0 + \dfrac{1}{2} \times 30 + 7 = \dfrac{1}{2} \times 45 + 15 + 7 = 22,5 + 22 = 44,5$

2. La fonction Python donnée ne calcule pas correctement w_1 car elle calcule u_1 avant de calculer w_1 il faut modifier l'ordre des opérations :

```
def suite(n):
    U = 30
    W = 45
    for i in range(1, n+1):
        W = W/2 + U/2 + 7
        U = U/2 + 10
    return W
```

3. (a)

Initialisation : Pour $n = 0$, $w_0 = 45$ et $10 \times 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 34 = 11 + 34 = 45$ donc l'égalité est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$.

Alors $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7 = \frac{1}{2}\left[10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34\right] + \frac{1}{2}\left[20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + 7$

donc $w_{n+1} = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 17 + 10 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 7 =$

$10(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34$

donc l'égalité est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : l'égalité est vraie pour $n = 0$ et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n + 1$ donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Pour tout entier naturel n, $w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$. (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{10}{n} = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 4$, $0 \leqslant 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{10}{n}$ donc d'après le théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (q^n avec $0 < q < 1$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 34$

EXERCICE 3 **5 points** **Affirmation 1 :**

D'après la représentation paramétrique donnée le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) et d'après l'équation cartésienne de P , $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

$\overrightarrow{n} = 6\overrightarrow{u}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires donc (d) est orthogonale à P.

$2x_H + 3y_H + 6z_H - 6 = 2 \times (-6) + 3 \times 2 + 6 \times 2 - 6 = 0$ donc $H \in P$.

H$(-6\,;\,2\,;\,2) \in (d)$ s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\left\{\begin{array}{rcl} -6 &=& -8 + \frac{1}{3}t \\ 2 &=& -1 + \frac{1}{2}t \\ -4 &=& -4 + t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -18 &=& -24 + t \\ 4 &=& -2 + t \\ 2 &=& -4 + t \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 6 &=& t \\ 6 &=& t \\ 6 &=& t \end{array}\right.$

Conclusion : **l'affirmation 1 est vraie**.

Affirmation 2 :

$\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}-9\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CD} = -9 \times (-3) + 2 \times 2 + 2 \times 0 = 31$

Or par définition $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{CH}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| \times \cos\left(\widehat{DCH}\right)$

On a $\|\overrightarrow{CH}\| = \sqrt{(-9)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{89}$ et $\|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{13}$

donc $\cos\left(\widehat{DCH}\right) = \dfrac{\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CH}\| \times \|\overrightarrow{CD}\|} = \dfrac{31}{\sqrt{89}\times\sqrt{13}}$

donc l'angle $\widehat{DCH}$ mesure $\arccos\left(\dfrac{31}{\sqrt{89}\times\sqrt{13}}\right) \approx 24{,}3°$ donc **l'affirmation 2 est fausse**.

Affirmation 3 : $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P ; $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P'.

Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires donc les plan P et P' ne sont pas parallèles et sont donc sécants, leur intersection est une droite.
A$(3\,;0\,;0) \in \Delta$ (obtenu avec $t = 0$)
$2x_A + 3y_A + 6z_A - 6 = 2\times3 + 3\times0 + 6\times0 - 6 = 0$ donc $A \in P$ et $x_A - 2y_A + 3z_A - 3 = 3 - 2\times 0 + 3\times0 - 3 = 0$ donc $A \in P'$
Donc l'intersection des plans P et P' est une droite contenant A. Pour déterminer si cette droite est Δ, soit on prend un autre point, soit on montre qu'un vecteur directeur de Δ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$.
B$(0\,;0\,;1) \in \Delta$ (obtenu avec $t = 1$)
$2x_B + 3y_B + 6z_B - 6 = 2\times0 + 3\times0 + 6\times1 - 6 = 0$ donc $B \in P$ et $x_B - 2y_B + 3z_B - 3 = 0 - 2\times 0 + 3\times1 - 3 = 0$ donc $B \in P'$ donc **l'affirmation 3 est vraie**.

Affirmation 4 : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$ donc une représentation paramétrique de la droite (CD) est

représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x = 3 - 3s\\ y = 2s\\ z = 0\end{array}\right., \quad s \in \mathbb{R}$

pour $s = \dfrac{31}{13}$ on retrouve les coordonnées de J donc $J \in$ (CD).

de plus $\overrightarrow{HJ}\begin{pmatrix}\frac{24}{13}\\ \frac{36}{13}\\ -2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HJ}\cdot\overrightarrow{CD} = \dfrac{24}{13}\times(-3) + \dfrac{36}{13}\times2 + (-2)\times0 = 0$

donc les vecteurs $\overrightarrow{HJ}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux donc J est bien le projeté orthogonal de H sur (CD) donc **l'affirmation 4 est vraie**.

EXERCICE 4 — 5 points

Partie A

1. Par lecture graphique : La température initiale est $f(0) = 40$ et on observe que la température redescend à cette valeur pour $t \approx 3{,}8$ minutes.
2. $f(t) = (at+b)e^{-0{,}5t}$ donc $f(0) = (a\times0+b)\times e^0 = b$ or $f(0) = 40$ donc $b = 40$.
3. f est dérivable sur $[0\,;10]$ comme produit de fonctions dérivables.
   $f = uv$ avec $u(t) = at + b$ et $v(t) = e^{-0{,}5t}$ donc $f' = u'v + v'u$ avec $u'(t) = a$ et $v'(t) = -0{,}5e^{-0{,}5t}$
   donc pour tout $t \in [0\,;10]$, $f'(t) = ae^{-0{,}5t} + (at+40)\times\left(-0{,}5e^{-0{,}5t}\right) = (-0{,}5at + a - 20)\,e^{-0{,}5t}$
   donc pour tout $t \in [0\,;10]$, $f'(t) + 0{,}5f(t) = (-0{,}5at + a - 20)\,e^{-0{,}5t} + 0{,}5(at+40)e^{-0{,}5t} = ae^{-0{,}5t}$
   f est solution de l'équation différentielle (E) donc $ae^{-0{,}5t} = 60e^{-0{,}5t} \Rightarrow a = 60$.

Partie B

1. Pour tout $t \in [0\,;10]$, $f'(t) = (-0{,}5at + a - 20)\,e^{-0{,}5t}$ avec $a = 60$ on obtient $f'(t) = (40 - 30t)e^{-0{,}5t}$

2. **a.** Pour tout $t \in [0\,;\,10]$, $e^{-0,5t} > 0$ donc $f'(t)$ a le même signe que $40 - 30t$.

$40 - 30t \geqslant 0 \iff -30t \geqslant -40 \iff t \leqslant \dfrac{4}{3}$ On en déduit le tableau de signes de $f'(t)$ et le tableau de variations de f sur $[0\,;\,10]$

y	0		$\frac{4}{3}$		10
Signes de $f'(t)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	40	$\nearrow$	$120e^{-\frac{2}{3}}$	$\searrow$	$640e^{-5}$

$f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \left(60 \times \dfrac{4}{3} + 40\right) e^{-0,5 \times \frac{4}{3}} = 120e^{-\frac{2}{3}} \approx 61,6$; $f(0) = 40$ et $f(10) = 640e^{-5} \approx 4,31$

b. Sur $\left]0\,;\,\dfrac{4}{3}\right]$, $f(f) > 40$ donc l'équation $f(t) = 40$ n'a pas de solution.

$\left[\dfrac{4}{3}\,;\,10\right]$: d'après les valeurs approchées calculées dans la question précédentes, $f(\frac{4}{3}) > 40$ et $f(10) < 40$ donc $40 \in \left[\dfrac{4}{3}\,;\,10\right]$

de plus f est continue (car dérivable) et strictement décroissante donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution α dans $\left[\dfrac{4}{3}\,;\,10\right]$

donc l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution α strictement positive sur $[0\,;\,10]$ ‘

c. À l'aide de la calculatrice on trouve $\alpha \approx 3,8$

Interprétation : La température revient à sa valeur initiale de 40°C après environ 3,8 minutes.

3. **a.** $\displaystyle\int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^4 (60t + 40)\mathrm{e}^{-0,5t}\mathrm{d}t.$

On pose $u(t) = 60t + 40$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-0,5t}$ alors $u'(t) = 60$ et $v(t) = -2\mathrm{e}^{-0,5t}$.

les fonctions u et v sont dérivables et leurs fonctions dérivées sont continues donc d'après la formules d'intégration par parties :

$\displaystyle\int_0^4 (60t + 40)\mathrm{e}^{-0,5t}\mathrm{d}t = \left[(60t + 40)(-2\mathrm{e}^{-0,5t})\right]_0^4 - \int_0^4 -2 \times 60\mathrm{e}^{-0,5t}\mathrm{d}t =$

$\left[(-120t - 80)\mathrm{e}^{-0,5t}\right]_0^4 + 120\int_0^4 \mathrm{e}^{-0,5t}\mathrm{d}t = -560\mathrm{e}^{-2} + 80 + 120\left[-2\mathrm{e}^{-0,5t}\right]_0^4 =$

$-560\mathrm{e}^{-2} + 80 + 120(-2\mathrm{e}^{-2} + 2) = -560e^{-2} + 80 - 240\mathrm{e}^{-2} + 240 = 320 - 800\mathrm{e}^{-2} = 320 - \dfrac{800}{\mathrm{e}^2}$

b. La température moyenne de cette réaction chimique au cours des 4 premières minutes est :

$\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{4}\left(320 - \dfrac{800}{\mathrm{e}^2}\right) = 80 - \dfrac{200}{\mathrm{e}^2} \approx 52,9$

Donc la température moyenne est environ 53°C sur les 4 premières minutes.