

œ Brevet Élémentaire du Premier Cycle œ

Aix-Marseille juin 1962

ENSEIGNEMENT LONG ET ENSEIGNEMENT COURT.

ALGÈBRE

1. Simplifier la fraction

$$\frac{(12x - 48)(x + 2)}{4x^2 - 16}$$

Pour quelle valeur de x cette fraction est-elle égale à 1?

2. Construire les droites (D_1) et (D_2) définies respectivement par

$$y = 3x - 12 \quad \text{et} \quad y = x - 2.$$

- a. Trouver les coordonnées du point d'intersection, M, des droites (D_1) et (D_2) .
La question 1. pouvait-elle permettre de prévoir ce résultat?
- b. Par le point A de coordonnées $(4; 0)$, on mène la perpendiculaire (D_3) à (D_2) .
Former l'équation de (D_3) .
Trouver les coordonnées du point d'intersection, H, de (D_2) et (D_3) .
- c. Calculer les longueurs AH et AM.
En utilisant les résultats obtenus, donner la valeur du sinus de l'angle aigu formé par les droites (D_1) et (D_2) .

Corrigé

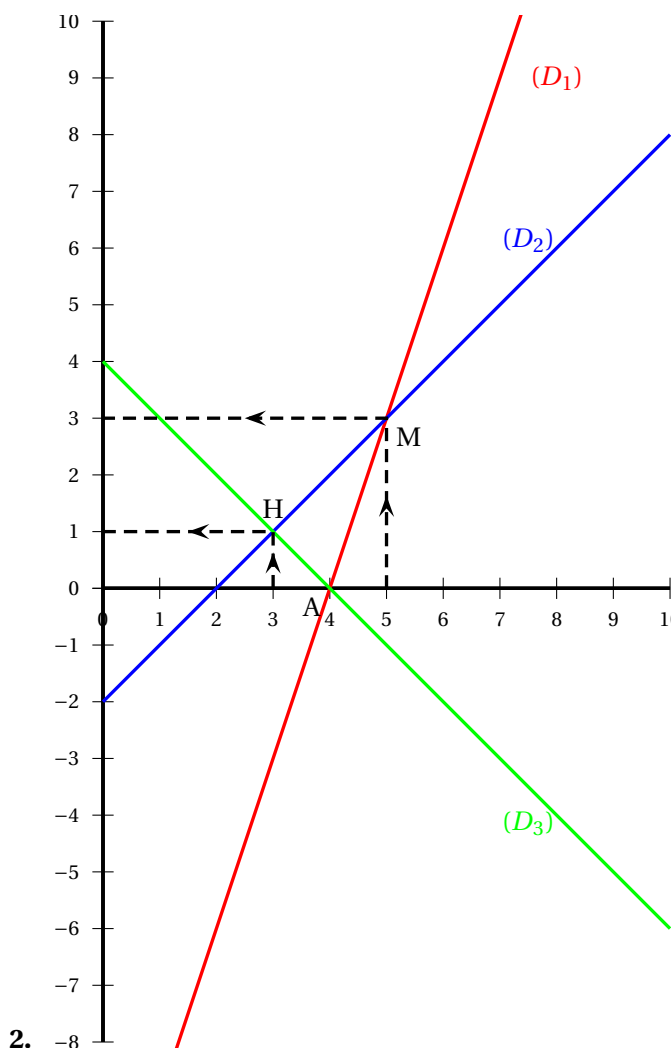
1. Soit $q(x) = \frac{(12x - 48)(x + 2)}{4x^2 - 16} = \frac{12(x - 4)(x + 2)}{4(x^2 - 4)} = \frac{3(x - 4)(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{3(x - 4)}{x - 2}$

si $x + 2 \neq 0$, soit si $x \neq -2$.

Pour $x \neq -2$, $q(x) = 1$ si $\frac{3(x - 4)}{x - 2} = 1$, soit si $3(x - 4) = x - 2$ ou $3x - 12 = x - 2$, puis

$2x = 10$ et enfin $x = 5$.

Vérification $\frac{(12 \times 5 - 48)(5 + 2)}{4 \times 25 - 16} = \frac{12 \times 7}{84} = \frac{84}{84} = 1$.



- a. Graphiquement on trouve que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes au point M de coordonnées $(5; 3)$.

À la question 1. on a vu que trouver que le quotient est égale à 1, revenait à un moment à résoudre l'équation $x - 12 = x + 2$ donc à trouver l'éventuel point commun à (D_1) et (D_2) . On a trouvé $x = 5$, soit l'abscisse du point commun aux deux droites. L'ordonnée de M se trouve soit en calculant $3 \times 5 - 12 = 15 - 12 = 3$, soit avec $5 - 2 = 3$. On a donc $M(5; 3)$.

- b. L'équation de (D_2) ayant pour coefficient directeur 1, toute perpendiculaire a un coefficient égal à -1 .

Une équation de (D_3) est donc de la forme $y = -x + b$, avec $b \in \mathbb{R}$.

Or $A(4; 0) \in (D_3)$ si $0 = -4 + b$, soit $b = 4$.

Une équation de (D_3) est donc $y = -x + 4$.

Les coordonnées de $H(x; y)$ commun au deux droites vérifient les équations des deux droites, soit

$y = x - 2 = -x + 4$, d'où $2x + 6$ et enfin $x = 3$, puis $y = x - 2 = 3 - 2 = 1$. Donc $H(3; 1)$.

- c. • Avec $A(4; 0)$ et $H(3; 1)$, on a $AH^2 = (3 - 4)^2 + (1 - 0)^2 = 1 + 1 = 2$.

De $AH^2 = 2$, on obtient $AH = \sqrt{2}$.

De même avec $A(4; 0)$ et $M(5; 3)$, on a $AM^2 = (5 - 4)^2 + (3 - 0)^2 = 1 + 9 = 10$.

De $AM^2 = 10$, on obtient $AM = \sqrt{10}$.

- Les droites (D_2) et (D_3) étant perpendiculaires en H, le triangle AHM est rectangle en H, d'hypoténuse [AM], donc :

$$\sin(\widehat{AMH}) = \frac{AH}{AM} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{2}{10}} = \sqrt{0,2} \text{ soit environ } 0,447.$$

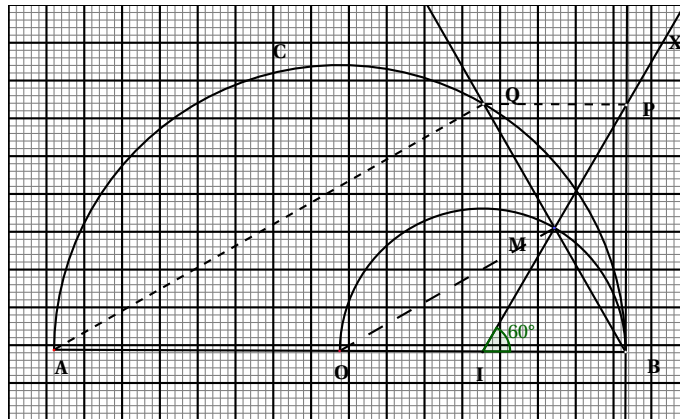
GÉOMÉTRIE

On considère le demi-cercle (C) de centre O, de diamètre [AB] tel que $AB = 2R$ et le point I, milieu de [OB].

La demi-droite [IX] faisant avec (IB) un angle $\widehat{BIX} = 60^\circ$ coupe en M le demi-cercle de centre I de rayon $\frac{R}{2}$ situé du même côté que (C) par rapport à (AB) et en P la tangente en B à (C) .

La demi-droite [BM] coupe (C) en Q.

1. Calculer les angles \widehat{OBM} et \widehat{BOM} .
2. Montrer que le triangle BIQ est rectangle en I.
3. Montrer que les triangles OBM et BIP sont égaux.
4. Calculer BM, OM, BQ, AQ, IP et IQ.
5. Montrer que le quadrilatère OIPQ est un parallélogramme.



Corrigé

1. Calculer les angles \widehat{OBM} et \widehat{BOM} .

$\widehat{OBM} = \widehat{IBM}$ car I est sur le segment OB.

Le triangle IBM est équilatéral, en effet $IM = IB$, B et M étant sur un cercle de centre I, il est donc isocèle d'angle au sommet de 60° , c'est donc un triangle équilatéral. On en déduit que $\widehat{IBM} = 60^\circ$. Comme les points O, I, B sont alignés dans cet ordre $\widehat{OBM} = 60^\circ$.

Le triangle BOM est rectangle en M car inscrit dans le cercle de diamètre [OB] $\widehat{OBM} = 60^\circ$ donc $\widehat{BOM} = 30^\circ$ car \widehat{BOM} est le complémentaire de \widehat{OBM} .

2. Montrer que le triangle BIQ est rectangle en I.

Le triangle ABQ est rectangle en Q car inscrit dans le cercle de diamètre [AB].

Les droites (AQ) et (OM) sont perpendiculaires à la droite (BQ) elles sont donc parallèles.

Comme O est le milieu de [AB], M est le milieu de [BQ] par le théorème de Thalès. $BI = BM$ (IBM est équilatéral) et donc $MB = MI = MQ$, les points B I Q sont donc sur un cercle de centre M, le triangle BIQ est rectangle en I car inscrit dans le cercle de diamètre [QB], M étant le milieu de [QB].

3. Montrer que les triangles OBM et BIP sont égaux.

Ils le sont par le premier cas d'égalité : des côtés égaux entre deux angles égaux, : $IB = BM$, $\widehat{BIP} = \widehat{OBM} = 60^\circ$ et $\widehat{OMB} = \widehat{IBP} = 90^\circ$.

4. Calculer BM, OM, BQ, AQ, IP et IQ.

— BM : $BM = IB$ car le triangle IBM est équilatéral et $IB = \frac{OB}{2} = \frac{R}{2}$ car I est le milieu, de [OB] donc $BM = \frac{R}{2}$.

— OM : Par le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OBM et car $OB = R$ et $BM = \frac{R}{2}$ par la réponse précédente :

$$OM^2 = OB^2 - BM^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3R^2}{4} \text{ et } OM = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

— BQ : $BQ = 2BM$ car M est le milieu de [BQ] et donc $BQ = R$ avec le résultat précédent.

— AQ : On a vu que M est le milieu de BQ et comme O est le milieu de AB par la réciproque de Thalès les droites AQ et OM sont parallèles et de plus $AQ = 2OM = R\sqrt{3}$.

— IP : On a vu que les triangles OBM et BIP sont égaux et rectangles, ils ont donc même hypoténuse soit $IP = OB = R$.

— IQ : Comme les triangles OBM et BIP sont égaux $BP = OM = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Les points I, M, P sont alignés dans cet ordre, $IM = \frac{R}{2}$ et $IP = R$ donc M est le milieu de [IP].

Le quadrilatère IBPQ ayant ses diagonales qui ont le même milieu M est un parallélogramme et ses côtés opposés [IQ] et [BP] sont égaux, $IQ = R\sqrt{2}$.

5. Montrer que le quadrilatère OIPQ est un parallélogramme.

On démontre que les côtés opposés sont parallèles.

– OI parallèle à QP; on sait que le quadrilatère IBPQ est un parallélogramme donc IB est parallèle à QP mais les points O I B. sont alignés donc (OI) est parallèle à (QP).

– OQ parallèle à IP : les points I et M sont les milieux respectifs de [OB] et [BQ] donc IM est parallèle à OQ, comme les points I M P sont alignés les droites (OQ) et (IP) sont parallèles.

Corrigé de la partie géométrie : Ghislain Foulquier

Corrigé de la partie numérique : Denis Vergès

Corrigé Vuibert 1962

Solution du problème de Géométrie

1. Valeurs des angles du triangle BOM.

Étant inscrit dans une demi-circonférence, ce triangle est rectangle en M. L'angle au centre BIM étant égal à 60° , le triangle BIM est équilatéral; l'angle OBM est donc, lui aussi, égal à 60° . L'angle BOM, qui en est le complément, est égal à 30° .

2. Étude du triangle BIQ

Si l'on trace le rayon OQ de la demi-circonférence (C), on forme un triangle BOQ, isocèle de sommet O.

L'angle en B de ce triangle étant (d'après le 1.) égal à 60° , ce triangle est équilatéral. Sa médiane QI est donc en même temps hauteur.

On en conclut que le triangle BIQ est rectangle.

3. Égalité des triangles OBM et BIP

Ces deux triangles sont rectangles, le premier en M, le second en I. Ils ont un angle aigu égal et un côté de l'angle droit égal; en effet, le triangle BIM étant équilatéral, on a $\widehat{OBM} = \widehat{BIP}$ et $MB = IB$. Ces deux triangles sont donc égaux.

4. Calcul de longueurs

Le triangle BIM étant équilatéral, on a $BM = BI = \frac{R}{2}$.

Le triangle BOQ étant équilatéral, de côté R , et OM étant l'une de ses hauteurs, on a

$$OM = R \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le segment [OM], joignant les milieux des côtés [BA] et [BQ] du triangle ABQ, est égal à la moitié du côté [AQ] de ce triangle; donc

$$AQ = 2OM = R\sqrt{3}.$$

[IP], étant l'hypoténuse du triangle rectangle BIP, dont l'angle I est égal à 60° , a une longueur double de celle du plus petit côté de l'angle droit de ce triangle; d'où

$$IP = 2 IB = OB = R.$$

Enfin, [OM] et [IQ] étant deux hauteurs du triangle équilatéral BOQ, on a

$$IQ = OM = R \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5. Nature du quadrilatère OIPQ

On a, d'après ce qui précède,

$$IP = OQ.$$

D'autre part, les angles \widehat{BIM} et \widehat{BOQ} étant tous égaux à 60° , IP et OQ sont parallèles. Le quadrilatère OIPQ, ayant deux côtés opposés parallèles et égaux, est un parallélogramme.