↜ Corrigé du Brevet Élémentaire du Premier Cycle ↝
Bordeaux juin 1962

ENSEIGNEMENT LONG ET ENSEIGNEMENT COURT.

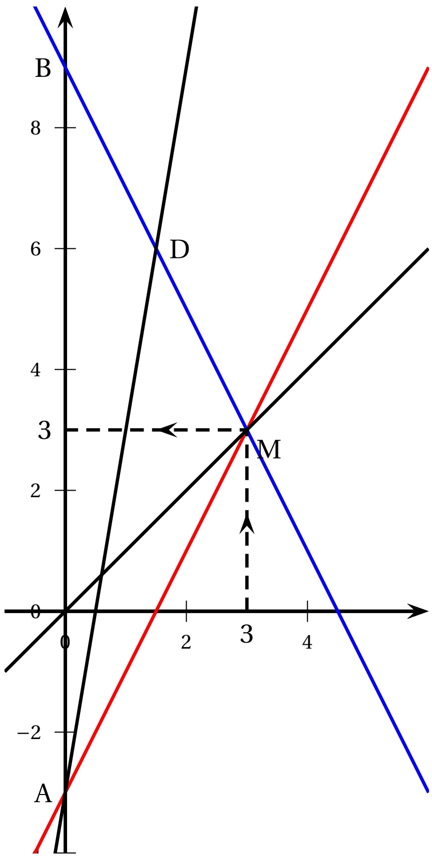
ALGÈBRE

1. Soit la fonction
$$y = (x+3)^2 - (x+3)(x-3) - (4x+21).$$
$y = x^2 + 9 + 6x - \left(x^2 - 3x + 3x - 9\right) - 4x - 21 = x^2 + 9 + 6x - x^2 + 9 - 4x - 21 = 2x - 3.$

2. Soit une autre fonction, d'équation
$$y = \frac{4x^2 - 9 - 2(2x-3)^2}{2x-3}$$
$y = \dfrac{(2x+3)(2x-3) - 2(2x-3)^2}{2x-3} = \dfrac{(2x-3)\,[2x+3-2(2x-3)]}{2x-3)} = \dfrac{(2x-3)\,[2x+3-4x+6)]}{2x-3)} = \dfrac{(2x-3)(-2x+9)}{2x-3)} = \dfrac{(2x-3)(-2x+9)}{2x-3)}.$

Si $2x - 3 \neq 0$ soit $2x \neq 3$ ou encore $x \neq \dfrac{3}{2}$, on peut simplifier en $y = -2x + 9$.

3. A a pour abscisse 0, donc son ordonnée est égale à $y = 2\times 0 - 3 = -3$. Donc A$(0\,;\,-3)$.
B a pour abscisse 0, donc son ordonnée est égale à $y = -2\times 0 + 9 = 9$. Donc B$(0\,;\,9)$.



Le point commun M aux deux droites a pour une abscisse x qui ne peut être égale à $\dfrac{3}{2}$ et elle que l'ordonnée pour les deux fonctions ci-dessus y sont égales, soit :

$$2x-3=9-2x \quad \text{ou} \quad 4x=12 \quad \text{ou} \quad x=3/$$

L'ordonnée de M se calcule soit par $y=2\times 3-3=6-3=3$, soit par $y=9-2\times 3=9-6=3$. Donc M(3 ; 3).

L'ordonnée de M est égale à son ordonnée : M appartient à la droite d'équation $y=x$ qui est la bissectrice de l'angle formé par les deux axes de coordonnées

AD étant la médiane contenant A dans le triangle ABM, D est le milieu de [BM].

Donc $\text{D}\left(\dfrac{0+3}{2}\ ;\ \dfrac{9+3}{2}\right)$, soit $\text{D}\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ 6\right)$.

L'équation de (AD) est :

$M(x\ ;\ y)\in\text{(AD)}$ si $y=ax+b$; en particulier :

$A(0\ ;\ -3)\in\text{(AD)}$ si $-3=a\times 0+b$, d'où $b=-3$;

$D\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ 6\right)\in\text{(AD)}$ si $6=a\times\dfrac{3}{2}-3$, d'où $9=a\times\dfrac{3}{2}$, puis $a=\dfrac{2}{3}\times 9=2\times 3=6$.

Une équation de la médiane (AD) est :

$M(x\ ;\ y)\in\text{(AD)}$ si $y=6x-3$.

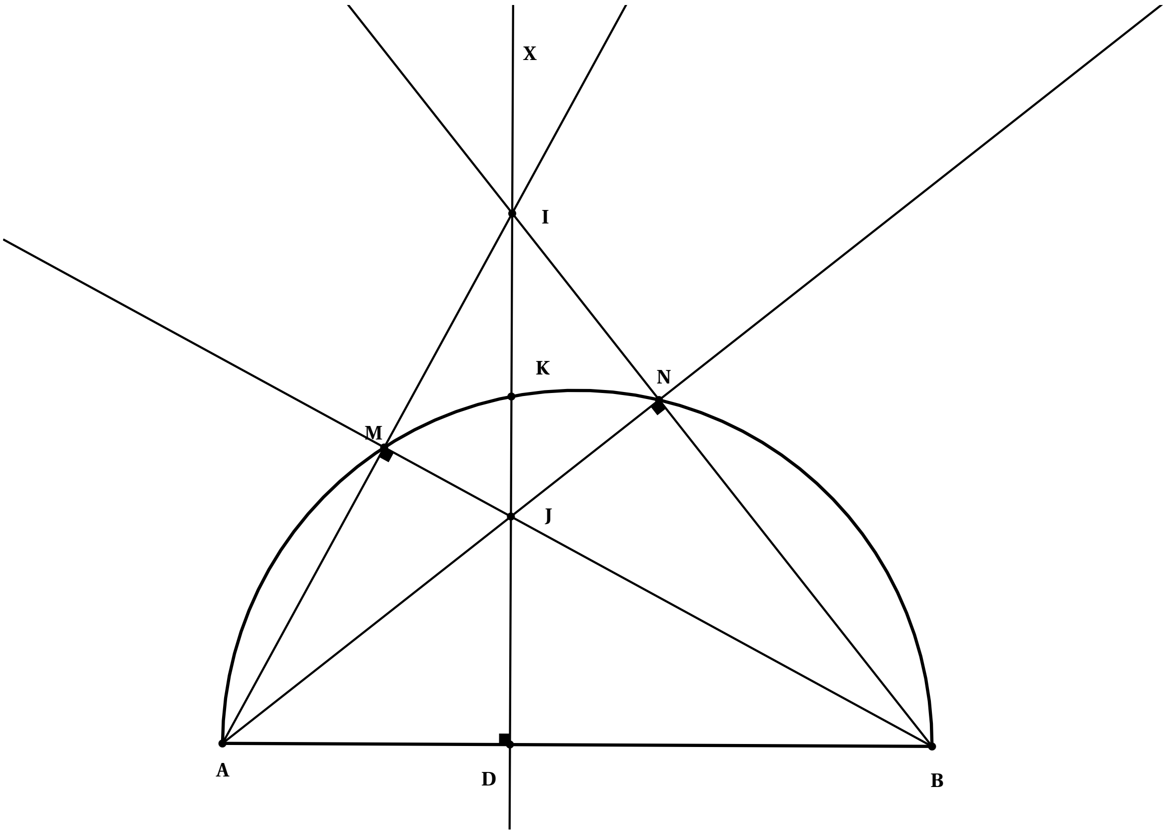
GÉOMÉTRIE

Un point M décrit un demi-cercle de diamètre [AB], de centre O.
Par un point D du diamètre [AB] on mène la perpendiculaire (DX- à ce diamètre.
(DX) coupe le demi-cercle en K.
On trace (AM) et (BM), qui coupent la perpendiculaire (DX) respectivement en I et J.

1. Que peut-on dire des triangles DAI, MAB et DJB ?
   En déduire les relations

$$\text{DA}\cdot\text{AB}=\text{AM}\cdot\text{AI} \quad \text{et} \quad \text{DA}\cdot\text{DB}=\text{DI}\cdot\text{DJ}.$$

2. Que deviennent les relations précédentes lorsque M est en K ?
   Quels sont les théorèmes connus qui se trouvent vérifiés ?
3. (AJ) coupe (BI) en N.
   Démontrer que le quadrilatère MINJ est inscriptible dans un cercle.
   Sur quelle ligne se déplace le point N ?



1. Que peut-on dire des triangles DAI, MAB et DJB ?

DAI et MAB sont semblables.

En effet , ce sont des triangles rectangle ayant un angle aigu en commun car $\widehat{DAI} = \widehat{BAM}$ le point D appartenant au segment AB et M au segment AI. MAB est rectangle car il est inscrit sans le cercle de ̣i [AB].

MAB et DIB sont semblables.

Même raisonnement, les angles aigus égaix sont $\widehat{ABM}$ et $\widehat{DBI}$, les points D et I appartenant respectivement au segment AB et BM.

En déduire les relations

$$\text{DA} \cdot \text{AB} = \text{AM} \cdot \text{AI} \quad \text{et} \quad \text{DA} \cdot \text{DB} = \text{DI} \cdot \text{DJ}.$$

La similitude des triangle DAI et MAB entraîne l'égalité des rapports : $\dfrac{\text{DA}}{\text{MA}} = \dfrac{\text{AI}}{\text{AB}}$ et celle de DAI et DJB entraîne $\dfrac{\text{DA}}{\text{DJ}} = \dfrac{\text{DI}}{\text{DB}}$.

Donc les produits « en croix » sont égaux ce qui donne les égalités demandées.

Remarque : les triangles DAI et DJB sont semblables car ils sont semblables tous les deux à MAB.

On utilise le fait que dans deux triangles semblables les côtés de l'un sont proportionnelles aux côtés de l'autre qui sont en face d'angles égaux.

Moyen pratique :

Pour les triangles DAI et MAB on écrit : $\dfrac{\text{DAI}}{\text{MAB}}$ avec les sommets des angles égaux en colonnes, on obtient alors les égalités

$\dfrac{\text{DA}}{\text{MA}} = \dfrac{\text{DI}}{\text{MB}} = \dfrac{\text{AI}}{\text{AB}}$

2. Que deviennent les relations précédentes lorsque M est en K ?

Si M est en K, M = K = I = J et les relations deviennent :

AD . AB = AK^2 et DA . DB = DK^2.

Quels sont les théorèmes connus qui se trouvent vérifiés ?

AD . AB = AK^2 : dans un triangle rectangle un petit côté est moyenne géométrique de sa projection sur l'hypothénuse et de cette hypothénuse.

DA . DB = DK^2 : dans un triangle rectangle la hauteur issue du sommet de l'angle droit est moyenne géométrique des segments qu'elle définit sur l' hypothénuse.

3. (AJ) coupe (BI) en N.

Démontrer que le quadrilatère MINJ est inscriptible dans un cercle.

Le point J est l'orthocentre du triangle ABI, c'est le point d'intersection ds deux hauteurs ID et BM par hypothèse donc AJ est la troisième car les hauteurs d'un triangle sont concourantes, ici au point J, et la droite AJ est perpendiculaire à BJ, le triangle IJN est rectangle, les points ,I, N, I sont cocycliques sur le cercle de diamètre [IJ].

Le triangle MIJ est rectangle en M donc les points M, I, J sont sur le cercle précédent, les qudrilatère MIJN est donc inscriptible dans le cerclede diamètre IJ.

Sur quelle ligne se déplace le point N ?

Le triangleABN est rectangle en N donc inscriptible dans le cercle de diamètre [AB], N se déplace sur le cercle de diamètre [AB].