∽ Corrigé du concours contrôleur des douanes 7 mars 2016 ∼

Branche surveillance Aéronautique : pilote d'hélicoptère

Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Exercice 1

On considère un jeu de trente-deux cartes, comprenant quatre couleurs (cœur, carreau, trèfle et pique), avec pour chacune huit hauteurs (as, roi, dame, valet, dix, neuf, huit et sept).
Les résultats des questions 1. et 2. pourront être exprimés sous la forme de produits de nombres premiers et/ou de nombres premiers élevés à une puissance.

1. Il y a $\binom{32}{8} = 10\,518\,300$ mains différentes.
2. **a.** 1 dame parmi 4 puis 7 parmi les 28 restantes soit $\binom{4}{1} \times \binom{28}{7} = 4\,736\,160$.
   b. Trois cœurs parmi les 8 puis 5 parmi les 24 restantes soit $\binom{8}{3} \times \binom{24}{5} = 2\,388\,224$
   c. La dame de cœur et deux autres cœurs et une dame (mais pas celle de cœur et 3 cœurs, soit :
   $1 \times \binom{7}{2} \times \binom{24}{5} + \binom{3}{1} \times \binom{7}{3} \times \binom{21}{4} = 1\,521\,009$.
   d. $\binom{28}{8} = 3\,108\,105$
   e. $\binom{4}{1} \times \binom{24}{7} = 1\,384\,416$.
3. La probabilité d'avoir 0 dame est égale à $\dfrac{3\,108\,105}{10\,518\,300}$, donc la probabilité d'avoir au moins une dame est égale à $1 - \dfrac{3\,108\,105}{10\,518\,300} \approx 0,704$.

Exercice 2

PARTIE A

On considère la fonction polynôme P définie par :

$$P(x) = 3x^3 - x - 2.$$

1. $P(1) = 3 - 1 - 2 = 0$.
2. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x : $P(x) = (x-1)\left(ax^2 + bx + c\right)$. On a $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$ et par identification avec l'écriture $3x^3 - x - 2$, on obtient :
   $a = 3$, $b - a = b - 3 = 0 \iff b = 3$, $c = 2$, donc
   $P(x) = (x-1)\left(3x^2 + 3x + 2\right)$.
3. Le trinôm e a un discriminant $\Delta = 3^2 - 4 \times 3 \times 2 = 9 - 24 < 0$: il n'a donc pas de racines et a le signe de $a = +3$ donc est positif quel que soit $x \in \mathbb{R}$; le signe de $P(x)$ est donc celui de $(x-1)$, donc négatif sur $]-\infty\ ;\ 1[$, nul pour $x = 1$ et positif sur $[1\ ;\ +\infty[$.

PARTIE B

On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = x^3 - x + 1 - 2\ln x \text{ où ln désigne le logarithme népérien.}$$

1. Somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$, g est dérivable et sur cet intervalle :

$g'(x) = 3x^2 - x - 2 \times \dfrac{1}{x} = 3x^2 - 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{3x^3 - x - 2}{x} = \dfrac{P(x)}{x}$.

2. Comme $x > 0$n, le signe de $g'(x)$ est celui de $P(x)$ dont on a vu le signe à la partie A, donc :

- $g'(x) > 0$ sur $]0\,;\,1[$ et g est décroissante sur cet intervalle;
- $g'(x) < 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$ et g est croissante sur cet intervalle;
- $g'(1) = 0$ donc $g(1) = P(1) = 0$ est le minimum de g sur $]0\,;\,+\infty[$;

3. On a $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} -2\ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$.

Don g décroit de $+\infty$ à $g(1) = 0$ puis croit de $g(1) = 0$ à ... : conclusion quel que soit $x \in]0\,;\,+\infty[$, $g(x) \geqslant 0$.

PARTIE C

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x + \ln x}{x^2}.$$

1. a. On a $\lim\limits_{x\to 0} x + \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\ln x}{x^2} = -\infty$ et enfin $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

b. $\dfrac{x+\ln x}{x^2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x^2}$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ (croissances comparées), alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 = +\infty$, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

d. • On a vu que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ ce qui signifie géométriquement que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$ au voisinage de zéro;

• On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\ln x}{x^2} = 0$: ceci signifie que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

2. a. h est une somme de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

$h'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} \geqslant 1 > 0$: donc h est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

b. S'il existe un point commun à (Δ) et à $\mathscr{C}$, son abscisse x est solution de l'équation :

$x + 1 = f(x) \iff x + 1 = x + 1 + \dfrac{x+\ln x}{x^2} \iff \dfrac{x+\ln x}{x^2} \iff x + \ln x = 0$.

On a vu que h est une fonction dérivable donc continue sur $[0\,;\,+\infty[$ et strictement croissante de moins l'infini à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc $\alpha \in]0\,;+\infty[$ tel que $\alpha + \ln\alpha = 0$.

On a $\ln 0,5 = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \approx -0,69$ et $0,5 + \ln 05 \approx -0,19 < 0$; de même $0,6 + \ln 0,6 \approx 0,09 > 0$; d'après le même théorème $0,5 < \alpha < 0,6$.

De la même façon $0,56 + \ln 0,56 \approx -0,02$ et $00,57 + \ln 0,57 \approx 0,01$, donc $0,56 < \alpha < 0,57$.

c. On a vu que la fonction d définie par $d(x) = f(x) - (x+1) = \dfrac{x + \ln x}{x^2}$ ale même signe que la fonction h définie par $h(x) = x + \ln x$ et que celle-ci est strictement croissante en s'annulant pour $x = \alpha$.

On a donc pour $x \in]0\ ;\ \alpha[, d(x) < 0$ ou $f(x) - (x+1) < 0 \iff f(x) < x+1$ ce qui signifie que la courbe $(\mathscr{C})$ est en dessous de la droite (Δ).

De même pour $x \in]\alpha\ ;\ +\infty[$, $d(x) > 0 \iff f(x) > x+1$ ce qui signifie que la courbe $(\mathscr{C})$ est au dessus de la droite (Δ).

Enfin pour $x = \alpha$, la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (Δ) ont un point commun $(f(\alpha) = \alpha + 1)$

3. Somme de quotients de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$, le dénominateur étant non nul car $x > 0 \Rightarrow x^3 > 0$, f est dérivable et sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$:

$f'(x) = 1 + \dfrac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \times x^2 - 2x \times (x + \ln x)}{x^4} = \dfrac{x^4 + x^2 + x - 2x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{x^4 - x^2 + x - 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{x^3 - x + 1 - 2\ln x}{x^3}$. On reconnait au numérateur $g(x)$, donc $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

Comme $x^3 > 0$, $f'(x)$ a donc le signe de $g(x)$ vu au 3. de la partie B dans lequel on a vu que $g(x) \geqslant 0$ quel que soit $x \in]0\ ;\ +\infty[$.

Conclusion $f'(x) \geqslant 0$, donc f est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ de moins l'infini (question 1. a.) à 1 (question 1. b. et la fonction f est continue car dérivable sur son ensemble de définition.

4. En utilisant à nouveau le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on en déduit qu'il existe un réel unique $\beta in]0\ ;\ +\infty$ tel que $f(\beta) = 0$.

De $f(0,46) = 0,46 + 1 + \dfrac{0,46 + \ln 0,46}{0,46^2} \approx -0,036$ et

$f(0,47) 0,47 + 1 + \dfrac{0,47 + \ln 0,47}{0,47^2} \approx +0,18$ on en déduit que $0,46 < \beta < 0,47$.

5. Puisque $1 > \alpha$, on sait que sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$, la fonction f est positive donc l'aire de la région du plan comprise entre $(\mathscr{C})$ et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ est égale à l'intégrale : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$; de même l'aire de la région du plan comprise entre (Δ) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ est égale à l'intégrale : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (x+1)\,\mathrm{d}x$, donc l'aire de la région du plan comprise entre $(\mathscr{C})$ et (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ est égale à la différence des deux intégrales précédentes, soit

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{x + \ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x = [\ln x]_1^{\mathrm{e}} + 1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}} =$ On admettra que : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}}\right] = \dfrac{2}{\mathrm{e}} \approx 0,736$. (u. a.)

Exercice 3

1. Chaque fin d'année il y a $3\,000 \times \dfrac{6}{100} = 6 \times 30 = 180$ € d'intérêts.

On a donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = C_n + 180$: ceci montre que la suite (C_n) est une suite arithmétique de raison $r = 180$, de premier terme $C_0 = 1\,800$.

2. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $C_n = C_0 + nr = 3\,000 + 180n$.

3. Au bout de 10 ans Sophie aura $C_{10} = 3\,000 + 1\,800 = 4\,800$ (€).

4. Il faut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$C_n = 2C_0 \iff C_0 + 180n = 2C_0 \iff 180n = C_0 \iff 180n = 3\,000 \iff n = \dfrac{3\,000}{180} = \dfrac{100}{6} = \dfrac{50}{3} \approx 16,7.$

Sophie devra attendre la 17^{e} année.

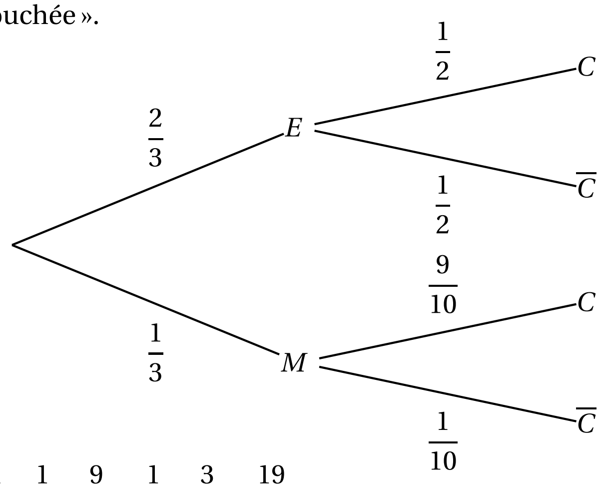
5. Il faut dans $\mathbb{N}$ résoudre l'inéquation :

$3\,000 + 180n > 10\,000 \iff 180n > 7\,000 \iff 18n > 700 \iff 9n > 350 \iff n > \dfrac{350}{9}$.

Or $\dfrac{350}{9} \approx 38,9$, donc le capital aura doublé la 39^{e} année.

Exercice 4

1. E : « le tireur est l'élève » ;
M : « le tireur est le maître » ;
T : « la cible est touchée ».



On a $p(C) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{9}{10} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{10} = \dfrac{19}{30}$.

2. Il faut trouver $p_C(E) = \dfrac{p(C \cap E)}{p(C)} = \dfrac{p(E \cap C)}{p(C)} = \dfrac{\frac{2}{3} \times 12}{\frac{19}{30}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{19}{30}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{30}{19} = \dfrac{10}{19}$.

Exercice 5

PARTIE A

On considère une suite réelle (u_n) qui vérifie : $\begin{cases} 0 & < & u_0 \\ 1 & < & \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \end{cases}$

1. Démontrons par récurrence que la suite est positive :

Initialisation : on sait que $u_0 > 0$: la proposition est vraie au rang 0.

Hérédité :

Supposons qu'au rang n, $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n > 0$, alors la relation $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ entraîne par produit par $u_n > 0$, $u_{n+1} > u_n > 0$, soit $u_{n+1} > 0$: la proposition est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, $n \in \mathbb{N}$ elle l'est aussi au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$: la suite est positive.

Il suit que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \iff u_{n+1} > u_n$, ce qui montre que la suite (u_n) est strictement croissante.

2. On a donc :
$1 < r \leqslant \dfrac{u_1}{u_0}$
$1 < r \leqslant \dfrac{u_2}{u_1}$
$1 < r \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$
Tous les nombres étant positifs en calculant les produits membre à membre des inégalités on obtient :
$1 < r^{n+1} < \dfrac{u_{n+1}}{u_0}$, d'où $u_{n+1} > u_0 \times r^{n+1}$.
Or on sait que $r > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} r^{n+1} = +\infty$ et comme $u_0 > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_0 \times r^{n+1} = +\infty$.
Par comparaison la suite (u_n) diverge (a pour limite plus l'infini).

PARTIE B

Soit a un réel strictement positif, on étudie la suite (v_n) définie par : $\left\{\begin{array}{ccc} 0 < & v_0 & < a \\ v_{n+1} & = & \dfrac{v_n + a}{2} \end{array}\right.$

1. On est dans les conditions de la partie A, donc la suite (v_n) est positive (non nulle) et strictement croissante, soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1} \iff 1 < \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, car $v_n \neq 0$.

2. Démontrons par récurrence que .
Initialisation : pour $n = 0$, on a $v_0 < a$: l'inégalité est vraie au rang 0 ;
Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n < a$, alors
$v_n + a < 2a \Rightarrow \dfrac{v_n + a}{2} < a$ ou encore $v_{n+1} < a$: l'inéglaité est vraie au rang $n+1$.
Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, $n \in \mathbb{N}$ elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n < 0$: $v_n < a$.
Conclusion : la suite (v_n) est croissante et majorée par $a \in \mathbb{R}$: elle converge donc vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant a$.
Par continuité la relation $v_{n+1} = \dfrac{u_n + a}{2}$ donne $\ell = \dfrac{\ell + a}{2} \iff 2\ell = \ell + a \iff \ell = a$.
La suite (v_n) converge vers a.

PARTIE C

1. Quelle est la nature de la suite (w_n) définie par : $\left\{\begin{array}{ccc} 0 & < & w_0 \\ w_{n+1} & = & w_n + 1 \end{array}\right.$
La suite (w_n) est une suite arithmétique de raison 1 de premier terme w_0

2. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 + n \times 1 = w_0 + n$ et donc $w_{n+1} = w_0 + (n+1) \times 1 = w_0 + n + 1$, donc
$\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{w_0 + n}{w_0 + (n+1)} = \dfrac{n\left(\frac{w_0}{n} + 1\right)}{n\left(\frac{w_0}{n} + 1 + \frac{1}{n}\right)} = \dfrac{\frac{w_0}{n} + 1}{\frac{w_0}{n} + 1 + \frac{1}{n}}$.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{w_0}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{1}{1} = 1$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 + x + 1\right)\mathrm{e}^{-x} - 1.$$

1. **a.** • Limite en moins l'infini :

   On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + x + 1 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ donc par produit de limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

   • Limite en plus l'infini :

   On a $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} - 1$.

   On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n\mathrm{e}^{-x} = 0$ quel que soit le naturel n, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$.

   b. f est dérivable comme somme de produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

   $f'(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x} - \left(x^2 + x + 1\right)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(2x + 1 - x^2 - x - 1\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(-x^2 + x\right) = x(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.

   Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ quel que soit réel x, le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme dont les racines sont 0 et 1. On sait que ce trinôme est négatif sauf sur l'intervalle $]0\,;\,1[$ où il est positif.

   La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$, croissante sur l'intervalle $]0\,;\,1[$ et décroissante sur l'intervalle $]1\,;\,\infty[$.

   On a $f(0) = 1 \times 1 - 1 = 0$ et $f(1) = (1+1+1)\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{3}{\mathrm{e}}$. D'où lze tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{\mathrm{e}} \approx 1,1$	$\searrow$	-1

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ dont une dans l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

3. De façon évidente $f(0) = 0$, donc 0 est solution.

   Sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue car dérivable sur cet intervalle ; elle est décroissante de $\dfrac{3}{\mathrm{e}}$ à -1 : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un réel unique $\alpha \in [1\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

4. Le tableau de variations montre que $f(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $]-\infty\,;\,\alpha]$ et $f(x) < 0$ sur l'intervalle $]\alpha\,;\,+\infty[$.