Corrigé du baccalauréat Amérique du Nord 21 mai 2024

Sujet 1

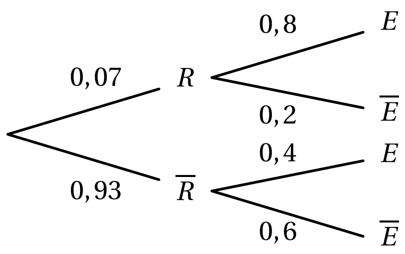
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

1. D'après l'énoncé, on a : $p(R) = 0,07$; $p_R(E) = 0,8$ et $p_{\overline{R}}(E) = 0,4$

   On en déduit l'arbre pondéré modélisant la situation :



   et on a : $p(R \cap E) = p(R) \times p_R(E) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$

2. R et $\overline{R}$ constituent une partition de l'univers.

   D'après la loi des probabilités totales : $p(E) = p(R \cap E) + p\left(\overline{R} \cap E\right)$

   donc $p(E) = p(R) \times p_R(E) + p(\overline{R}) \times p_{\overline{R}}(E)$

   donc $p(E) = 0,056 + 0,93 \times 0,4 = 0,428$.

3. On cherche la probabilité que le joueur obtienne un objet rare sachant qu'il a tiré une épée.

   $p_E(R) = \dfrac{p(R \cap E)}{p(E)} = \dfrac{0,056}{0,428} \approx 0,131$ au millième près.

Partie B

1. Les 30 défis constituent une répétition d'expériences aléatoires identiques et indépendantes à deux issues, il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(30\,;\,0,07)$ de paramètres $n = 30$ et $p = 0,07$

   Son espérance est $E(X) = n \times p = 30 \times 0,07 = 2,1$

2. $p(X < 6) = p(X \leqslant 5) \approx 0,984$ au millième près.

3. On cherche le plus grand entier k tel que $p(X \geqslant k) \geqslant 0,5$

   $p(X \geqslant k) \geqslant 0,5 \iff 1 - p(X < k) \geqslant 0,5 \iff -p(X < k) \geqslant -0,5 \iff$

   $p(X < k) \leqslant 0,5 \iff p(X \leqslant k-1) \leqslant 0,5$.

   En utilisant la calculatrice on trouve : $p(X \leqslant 1) \approx 0,3694$ et $p(X \leqslant 2) \approx 0,6487$

   La plus grande valeur de k telle que $p(X \geqslant k) \geqslant 0,5$ est donc $k = 2$.

   Après avoir remporté 30 défis, dans au moins 50 % des cas, le joueur aura tiré au moins 2 objets rares.

4. On cherche le plus petit entier naturel n tel que $p(X \geqslant 1) \geqslant 0,95$

$p(X \geqslant 1) \geqslant 0,95 \iff 1 - p(X=0) \geqslant 0,95 \iff -p(X=0) \geqslant -0,05 \iff$

$p(X=0) \leqslant 0,05$; or $p(X=0) = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \times 0,07^0 \times 0,93^n = 0,93^n$

$0,93^n \leqslant 0,05 \iff \ln\left(0,93^n\right) \leqslant \ln(0,05)$ car ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$

$\iff n\ln(0,93) \leqslant \ln(0,05) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,05)}{\ln(0,93)}$ car $\ln(0,93) < 0$

$\iff n \geqslant 41,3 \iff n \geqslant 42$

Il faut donc tirer au minimum 42 objets pour que la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare soit supérieure ou égale à $0,95$.

EXERCICE 2 — 5 points

1. On considère les points A$(1\,;0\,;3)$ et B$(4\,;1\,;0)$.

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est : **c.** $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&1+3t\\ y&=&t\\ z&=&3-3t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

On vérifie que pour $t=0$ on obtient les coordonnées du point A et pour $t=1$, on obtient les coordonnées du point B.

La réponse correcte est la réponse C.

2. Le paramètre $t=1$ permet de vérifier l'ordonnée des trois premiers points mais pas leurs autres coordonnées, donc le seul point qui appartient à la droite (d) est R.

Pour $t = -\dfrac{3}{2}$ on trouve les coordonnées de R.

La réponse correcte est la réponse D.

3. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

$\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d').

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ n'ont pas leur coordonnées proportionnelles donc ils ne sont pas colinéaires. Donc les droites (d) et (d$'$) sont ni parallèles ni confondues.

Les deux droites sont sécantes s'il existe deux réels t et k tels que :

$$\left\{\begin{array}{l c r}3+4t&=&-2+3k\\ 6t&=&-1-2k\\ 4-2t&=&1+k\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c r}4t-3k&=&-5\\ 6t+2k&=&-1\\ -2t-k&=&-3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c r l}-5k&=&-11&L_1+2L_3\\ 2t&=&-7&L_2+2L_3\\ -2t-k&=&-3&\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{l c r}k&=&\frac{11}{5}\\ t&=&\frac{-7}{2}\\ -2t-k&=&-3\end{array}\right.$$

or $-2\times\dfrac{-7}{2}-\dfrac{11}{5}=\dfrac{24}{5}\neq -3$
donc les droites (d) et (d′) ne sont pas sécantes, et comme elles sont ni parallèles ni sécantes, elles sont non coplanaires.

La réponse correcte est la réponse B.

4. Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (d) est un vecteur normal au plan (P).

donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(P)\iff\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{u}=0\iff 4(x-2)+6(y-1)-2(z-0)=0\iff 4x+6y-2z-14=0$

donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(P)\iff 2x+3y-z-7=0$

Une équation du plan (P) est : $2x+3y-z-7=0$.

La réponse correcte est la réponse A.

EXERCICE 3 — 5 points

Partie A : lectures graphiques

1. $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A donc $f'(1)=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-4+1}{0-1}=3$, de plus, l'ordonnée à l'origine de $(\mathscr{T})$ est -4 donc l'équation réduite de $(\mathscr{T})$ est $y=3x-4$

2. f semble concave sur $]0\,;\,1[$ (car $\mathscr{C}_f$ semble située au-dessous ses tangentes) et f semble convexe sur $]1\,;\,+\infty[$ (car $\mathscr{C}_f$ semble située au-dessus de ses tangentes).

Le point A(1 ; −1) semble être un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Partie B : étude analytique

1.
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\left(x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}2\ln(x)=+\infty$ donc par produit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(x^2\right)=+\infty$
  de plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ donc par somme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to0}x\ln\left(x^2\right)=\lim_{x\to0}2x\ln(x)=0$ par croissance comparée
  de plus $\displaystyle\lim_{x\to0}-\frac{1}{x}=-\infty$ (car $x>0$) donc par somme $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=-\infty$
  L'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

a. f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables :
$f=uv-w$ avec $u(x)=x$; $v(x)=\ln\left(x^2\right)$ et $w(x)=\dfrac{1}{x}$
donc $f'=u'v+v'u-w'$ avec $u'(x)=1$; $v'(x)=\dfrac{2x}{x^2}=\dfrac{2}{x}$ et $w'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$
donc $f'(x)=1\times\ln\left(x^2\right)+\dfrac{2}{x}\times x+\dfrac{1}{x^2}=\ln\left(x^2\right)+2+\dfrac{1}{x^2}=2\ln(x)+2+\dfrac{1}{x^2}$.

b. f' est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables
$f''(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{-2x}{x^4}=\dfrac{2x^2}{x^3}-\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{2(x^2-1)}{x^3}=\dfrac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$.

3. **a.** On étudie le signes de $f''(x)$:

x	0		1		$+\infty$
signes de $x+1$		$+$		$+$	
signes de $x-1$		$-$	0	$+$	
signes de x^3		$+$		$+$	
signes de $f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

f est donc concave sur $]0\,;\,1[$ et convexe sur $]1\,;\,+\infty[$.

La dérivée s'annulant en $x=1$ en changeant de signe, $\mathscr{C}_f$ a un point d'inflexion en $x=1$, c'est le point $\text{A}(1\,;\,-1)$.

b. On utilise le tableau de signes de $f''(x)$ pour établir le tableau de variations de f' :

x	0		1		$+\infty$
signes de $f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f'	‖	$\searrow$	3	$\nearrow$	

$f'(1)=2\ln(1)+2+\dfrac{1}{1^2}=3.$

f' admet pour minimum 3 sur $]0\,;\,+\infty[$ donc $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)>0$ donc f est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

4. **a.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ donc $0 \in \left]\lim_{x\to 0} f(x)\,;\,\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$.

De plus f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (son corollaire) l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,+\infty[$.

b. En utilisant la calculatrice on trouve $1,327 \leqslant \alpha \leqslant 1,328$ donc $\alpha \approx 1,33$ au centième près.

de plus $f(\alpha)=0 \iff \alpha\ln\left(\alpha^2\right)-\dfrac{1}{\alpha}=0 \iff \ln\left(\alpha^2\right)=\dfrac{1}{\alpha^2} \iff \alpha^2=\exp\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$

par croissance de la fonction exponentielle.

Exercice 4 — 5 points

1. $I_0=\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(x)\,\mathrm{d}x=[-\cos(x)]_0^{\pi}=-\cos(\pi)+\cos(0)=-(-1)+1=2.$

2. **a.** Pour tout entier naturel n , on a : $\forall x \in [0\,;\,\pi]$, $\sin(x)\geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-nx}>0$ donc $\forall x \in [0\,;\,\pi]$, $\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\geqslant 0$.

donc $\displaystyle\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ donc pour tout entier naturel n , on a $I_n\geqslant 0$.

b. $I_{n+1}-I_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-(n+1)x}\sin(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-(n+1)x}\sin(x)-\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ par linéarité.

Donc $I_{n+1}-I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\left(\mathrm{e}^{-nx}\times\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-nx}\right)\mathrm{d}x = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)\mathrm{d}x$

$\forall x \in [0\,;\pi]$, $\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \geqslant 0$ de plus

$x \in [0\,;\pi] \iff 0 \leqslant x \leqslant \pi \iff -\pi \leqslant -x \leqslant 0 \iff \mathrm{e}^{-\pi} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^0$ car la fonction exp est croissante.

donc $\forall x \in [0\,;\pi]$, $\mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 \iff \mathrm{e}^{-x}-1 \leqslant 0$ donc $\forall x \in [0\,;\pi]$,

$\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,(\mathrm{e}^{-x}-1) \leqslant 0$,

donc par propriété des intégrales, $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)\mathrm{d}x \leqslant 0$

donc pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1}-I_n \leqslant 0$.

c. Pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} \leqslant I_n$ donc la suite (I_n) est décroissante et pour tout entier naturel n , on a $I_n \geqslant 0$ donc (I_n) est minorée par 0.

Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (I_n) converge.

3. **a.** $\forall x \in [0\,;\pi]$, $\sin(x) \leqslant 1$ donc $\forall x \in [0\,;\pi]$, $\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \leqslant \mathrm{e}^{-nx}$

donc par propriété de l'intégration : $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$

b. Soit $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^{\pi} = \frac{-1}{n}\mathrm{e}^{-n\pi} - \frac{-1}{n}\mathrm{e}^0 = \frac{1}{n}\left(-\mathrm{e}^{-n\pi}+1\right) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$

c. Pour tout entier naturel n , $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n} = 0$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n\pi} = 0$.

Donc d'après le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

4. **a.** $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x$

- On pose $u(x) = \mathrm{e}^{-nx}$ et $v'(x) = \sin(x)$;
  donc $u'(x) = -n\mathrm{e}^{-nx}$ et $v(x) = -\cos(x)$.
  D'après la formule d'intégration par parties :
  $\displaystyle\int_0^{\pi} u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(x)v(x)\mathrm{d}x$
  donc $I_n = [-\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)]_0^{\pi} - \displaystyle\int_0^{\pi} n\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\mathrm{d}x =$
  $\left(-\mathrm{e}^{-n\pi}\cos(\pi)+\mathrm{e}^0\cos(0)\right) - n\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\mathrm{d}x$
  donc $I_n = \mathrm{e}^{-n\pi}+1-nJ_n$
- On pose $u(x) = \sin(x)$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-nx}$;
  donc $u'(x) = \cos(x)$ et $v(x) = \dfrac{-1}{n}\mathrm{e}^{-nx}$.
  D'après la formule d'intégration par parties :
  $\displaystyle\int_0^{\pi} u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(x)v(x)\mathrm{d}x$
  donc $I_n = \left[\dfrac{-1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\right]_0^{\pi} - \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{-1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\mathrm{d}x =$
  $\left(\dfrac{-1}{n}\mathrm{e}^{-n\pi}\sin(\pi) - \dfrac{-1}{n}\mathrm{e}^0\sin(0)\right) + \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\mathrm{d}x.$
  Donc $I_n = \dfrac{1}{n}J_n$

b. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $I_n = \dfrac{1}{n}J_n$ donc $J_n = nI_n$

de plus $I_n = \mathrm{e}^{-n\pi}+1-nJ_n$ donc $I_n = \mathrm{e}^{-n\pi}+1-n^2I_n$

$I_n = \mathrm{e}^{-n\pi} + 1 - n^2 I_n \iff I_n + n^2 I_n = \mathrm{e}^{-n\pi} + 1 \iff (n^2+1)I_n = \mathrm{e}^{-n\pi} + 1 \iff$
$I_n = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}$.

5. On souhaite obtenir le plus petit entier n tel que $I_n < 0,1$.

Il faut écrire à la cinquième ligne du script Python : `while I >= 0.1 :`.